MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 7. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 10. JUNI 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

Preis DMark 19.80

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstr. 45,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretungen im Ausland: Schweiz: Lange, Maxwell & Springer A. G., Basel 15, Postfach. — Frankreich: Lange, Maxwell & Springer S. A., 24, Rue des Ecoles; Paris (V°). — England, USA und übriges Ausland: Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

---

52. Band. **Inhalt:** 7. Heft.

Seite

Löbell, Prof. Dr. F., München 23, Herzogstr. 1a: Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren 759

Maak, Prof. Dr. W., Hamburg-Gr. Flottbeck, Rethelstr. 4: Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen 770

Heinhold, Prof. Dr. J., München 2 NW, Walter v. Dyckplatz 1: Einige mittels Laplace-Transformation lösbare Integralgleichungen. I. 779

Bol, Prof. Dr. G., Freiburg (Br.), Mathematisches Institut der Universität: Zur Projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen 791

Krull, Prof. Dr. W., Bonn a. Rhein, Mathematisches Seminar der Universität: Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen 810

Severi, Prof. Dr. F., Roma (Italien), Piazza Don Minzoni 9: Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione 827

Grunsky, Dozent Dr. H., Tübingen, Mathematisches Institut der Universität: Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten“ 852

Wir erlauben uns, die Abonnenten darauf aufmerksam zu machen, daß wir mit Beginn des nächsten (53.) Bandes dieser Zeitschrift wieder zu der früher üblichen bandweisen Berechnung übergehen werden. Der Preis für den etwa 30—40 Bogen umfassenden Band wird DMark 96.— betragen.

Der Bandtitel mit Inhaltsverzeichnis befindet sich am Schluß dieses Heftes.

Der Verlag

Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Es ist gewiß schon in früheren Zeiten versucht worden, die imaginären Vektoren des dreidimensionalen affinen bzw. euklidischen Raumes reell zu deuten. Wenn es auch nahe liegt, einen solchen Vektor durch ein geordnetes Paar reeller Vektoren darzustellen, und es auch leicht zu erkennen ist, daß dann der Multiplikation eines Vektors mit einem komplexen Skalar das affine Bild einer gewissen, auf ein Paar gleich langer, zueinander senkrechter Vektoren ausgeübten Drehstreckung entspricht, so scheint es doch schwierig zu sein, auf diesem Wege auch für die anderen Produktbildungen der Vektorrechnung ansprechende Deutungen zu finden.

Nun eröffnet sich aber von einer ganz anderen Seite her eine Möglichkeit einer reellen Veranschaulichung der Vektoren von drei komplexen Dimensionen und aller mit ihnen vorzunehmenden Operationen: Man trifft das Wesentliche, wenn man sagt, daß man ihnen die reellen eigentlichen *Geschwindigkeitsschrauben des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes* umkehrbar eindeutig zuordnen kann; speziell wird dabei die Menge der komplexen Einheitsvektoren umkehrbar eindeutig auf die der reellen eigentlichen gerichteten Geraden dieses Raumes, die der isotropen Vektoren auf die seiner reellen unendlich fernen Punkte, allerdings nicht umkehrbar eindeutig, abgebildet. Den Vektoroperationen aber entsprechen einfache Verknüpfungen zwischen den genannten geometrischen Gebilden.

Der Darlegung dieser Theorie, die auf alten Überlegungen beruht, die hauptsächlich Klein in seinen Vorlesungen durchgeführt hat[1]), mögen die folgenden Seiten gewidmet sein.

1. Wir wollen uns die absolute Fläche des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes auf eine Riemannsche Zahlenkugel im euklidischen Raum abgebildet denken, so daß ihren reellen Punkten, d. h. den reellen unendlich fernen Punkten des nichteuklidischen Raumes umkehrbar eindeutig die komplexen Zahlen ξ als Koordinaten zugewiesen sind.

[1]) Vergl. hauptsächlich F. Klein, Vorl. ü. d. hypergeometrische Funktion. Autographierte Vorlesung vom W.-S. 1893/94. Neue Ausgabe Berlin 1933, S. 179-196. Siehe auch H. Beck, Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. Diss. Hannover 1905.

Dann können die reellen *eigentlichen Geraden* des hyperbolischen Raumes eindeutig den *binären quadratischen Formen*

$$g \equiv g_1 \xi^2 + g_2 \xi \eta + g_3 \eta^2 \tag{1}$$

mit komplexen Koeffizienten g_k $(k = 1, 2, 3)$, deren Diskriminante $g_2^2 - 4 g_1 g_3$ nicht verschwindet, zugeordnet werden, während umgekehrt die Zahlen g_k durch eine solche Gerade nur bis auf einen willkürlichen, von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktor ϱ bestimmt sind; die reellen unendlich fernen Punkte sind den Formen (1) mit verschwindender Diskriminante zuzuweisen[2]): das geschieht in naheliegender Weise dadurch, daß die Werte der aus den Nullstellen (ξ, η) der Form g gebildeten Quotienten

$$\zeta = \xi : \eta \tag{2}$$

als Koordinaten der unendlich fernen Punkte, kurz[3]) der „Enden" derjenigen Geraden festgesetzt werden, die g entsprechen soll, und umgekehrt; diese Gerade werden wir ebenfalls mit g bezeichnen. Es ist zu beachten, daß jedes Büschel von Geraden g, die die absolute Fläche in einem Punkte berühren, dieselbe Formenschar ϱg bestimmt, zwei verschiedene Gerade eines solchen Büschels also nicht durch ihre Formen unterschieden werden können; es muß daher vereinbart werden, daß an die Stelle dieser Tangenten die Berührpunkte[4]) treten sollen.

2. Da die *Bewegungen des hyperbolischen Raumes* bekanntlich die Transformationen der absoluten Fläche in sich induzieren, die durch die nicht konstanten, gebrochen linearen Funktionen der Variablen ζ mit komplexen Koeffizienten oder, da (2) allgemein gelten soll, durch

---

[2]) Beck nennt in seiner in der vorigen Fußnote zitierten Schrift die eigentlichen Geraden des hyperbolischen Raumes „Strahlen", die unendlich fernen Punkte „Punktstrahlen". In dieser wie in anderen Arbeiten Beck's spielt das Study'sche Übertragungsprinzip — die Möglichkeit, die Gesamtheit der reellen eigentlichen Geraden des hyperbolischen Raumes mit Einschluß der unendlich fernen Punkte umkehrbar eindeutig auf die Gesamtheit der komplexen Punkte der projektiven Ebene abzubilden — eine große Rolle; es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß dieses Prinzip sich unmittelbar ergibt, wenn man die Koeffizienten der Form g als homogene Dreieckskoordinaten deutet. Vgl. besonders Beck, Über einen Satz von Herrn Kubota. Tôhoku Math. Journ. 24 (1924), S. 190 ff., wo schon die binären quadratischen Formen durch ternäre Linearformen, d. s. im Grunde genommen Vektoren, ersetzt werden. — Da die reelle Kugel ein Bild der komplexen projektiven Geraden ist, erkennt man auch den Zusammenhang mit dem Hesseschen Übertragungsprinzip.

[3]) Diese Bezeichnung wird im Anschluß an Hilbert gebraucht.

[4]) Das sind eben die „Punktstrahlen" nach Beck; s. Fußnote 2 oben. Für den euklidischen Raum schuf die Begriffe „Strahl" und „Punktstrahl" schon E. Study; Ein neuer Zweig der Geometrie, Jahresber. d. DMV. XI (1902), S. 101, und Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 200 u. 261.

die nicht ausgearteten linearen Substitutionen

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{3}$$

dargestellt werden, so müssen wir zur Erreichung unseres Zieles die einschlägigen Tatsachen der klassischen Invariantentheorie heranziehen[5]).

a) Erinnern wir uns zunächst daran, daß zwei Formen g und h die *simultane Invariante*

$$(g, h) = 2g_1h_3 - g_2h_2 + 2g_3h_1 \tag{4}$$

besitzen, die für $g \equiv h$ in die *Invariante* von g

$$(g, g) = 4g_1g_3 - g_2^2 \tag{4'}$$

übergeht, der wir schon oben mit anderem Vorzeichen begegneten.

Dazu tritt die *simultane Kovariante* von g und h, die mit Hilfe der Funktionaldeterminante der Formen erklärt werden kann:

$$[g, h] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \eta}\right). \tag{5}$$

Ferner kommt hinzu die *Simultaninvariante* der drei Formen f, g, h, die mit Hilfe von (4) und (5) folgendermaßen definiert werde:

$$[f, g, h] = (f, [g, h]). \tag{6}$$

Es sei daran erinnert, daß es sich bei (4), (5) und (6) um relative Invarianten bzw. Kovarianten handelt; die Gewichte von (4), (5) und (6) sind bez. 2, 1 und 3.

b) Aus den Erklärungen (4), (5) und (6) und aus der trivialen Bedeutung der Ausdrücke

$$g + h \text{ und } \varrho g,$$

wo ϱ eine komplexe Zahl sei, folgen einige leicht zu verifizierende Beziehungen, die später für uns wertvoll sein werden:

$$(g, h) = (h, g), \qquad (f + g, h) = (f, h) + (g, h), \qquad (\varrho g, h) = \varrho(g, h); \tag{7}$$

$$[g, h] = -[h, g], \qquad [f + g, h] = [f, h] + [g, h], \qquad [\varrho g, h] = \varrho[g, h]; \tag{8}$$

$$[f, g, h] = [g, h, f] = [h, f, g] = -[f, h, g] = -[h, g, f] = -[g, f, h]. \tag{9}$$

Die Operationen (7) und (8) dürfen wir als *Multiplikationen* bezeichnen[6]), da sie bez. jedes Faktors distributiv zur Addition sind; das gleiche gilt von dem dreifachen Produkt (9).

---

[5]) Siehe Clebsch-Lindemann, Vorl. ü. Geometrie, I_1, Leipzig und Berlin 1932, S. 362 ff.

In der vorliegenden Arbeit werden die Formen wie bei Klein ohne Binomialkoeffizienten geschrieben. Die Invarianten und Kovarianten werden im folgenden meist mit anderen Zahlenfaktoren, zum Teil nur mit anderem Vorzeichen gebraucht als gewöhnlich; hierzu vergl. Fußnote 7 dieser Arbeit.

[6]) Eine Verknüpfung zwischen mehreren Größen derselben Art oder verschiedener Arten wird als Multiplikation bezeichnet, wenn für jede der Größenarten eine Addition definiert ist und die besagte Verknüpfung bezüglich jeder der Größen distributiv zu ihrer Addition ist. Hierüber darf eine stillschweigende

Wir können in den Relationen (7), (8), (9) Regeln für ein *Rechnen mit Formen* sehen, deren formale Übereinstimmung mit den Gesetzen der Vektorrechnung im dreidimensionalen euklidischen Raum in die Augen springt. Das tritt noch auffallender hervor, wenn wir durch Ausrechnen gemäß (4) und (5) die Gültigkeit der „Zerlegungsformel“ [7])

$$[f,[g,h]] = g(f,h) - h(f,g)$$

und der unmittelbar aus dieser fließenden „Vertauschungsformel“

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$$

bestätigen. Es wird nun aber darauf ankommen, den geometrischen Sinn dieses Kalküls zu ergründen.

3. Machen wir uns zunächst klar, welche geometrische, d. h. gegenüber der Fundamentalgruppe der Bewegungen des hyperbolischen Raumes invariante Bedeutung das *Verschwinden der Invarianten und Kovarianten* besitzt.

a) Das Bestehen der Gleichung

$$(g,h) = 0 \tag{10}$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß *die Geraden g und h sich senkrecht schneiden* oder, wie wir kurz sagen wollen, *„sich kreuzen“*. Das ergibt sich unmittelbar daraus, daß, wie man weiß, in diesem und nur in diesem Fall die Endenpaare der beiden Geraden harmonisch liegen. Dabei ist Folgendes zu beachten: Wenn eine der Geraden, etwa g, zu einem unendlich fernen Punkt entartet, so fällt dieser mindestens mit einem der Enden der anderen, h, zusammen.

b) Die Beziehung

$$[g,h] \equiv 0 \tag{11}$$

soll bedeuten, daß die links stehende Form für alle Werte von ξ und η verschwinde; dies ist die charakteristische Bedingung dafür, daß *g und h eine und dieselbe Gerade* bedeuten. Denn die Formen g und h haben dann entsprechend proportionale Koeffizienten, wie man sofort erkennt, wenn man die Funktionaldeterminante (5) explizit niederschreibt:

$$[g,h] = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ \eta^2 & -2\xi\eta & \xi^2 \end{vmatrix}. \tag{5'}$$

Übereinkunft unter den Mathematikern festgestellt werden; trotzdem muß es einmal ausdrücklich gesagt werden, da gelegentlich die Berechtigung dieser Sprechweise angezweifelt wurde. Von verschiedener Art sind Größen zu nennen, wenn sie nicht durch eine Addition miteinander verknüpfbar sind.

[7]) Die volle Übereinstimmung dieser Formel mit der analogen der gewöhnlichen Vektorrechnung wurde erreicht durch geeignete Wahl der Zahlenfaktoren der In- und Kovarianten; vergl. den Schlußsatz von Fußnote 5 dieser Arbeit.

Dabei ist es zulässig, daß die Geraden in unendlich ferne reelle Punkte ausgeartet sind. Insbesondere ist (11) erfüllt, wenn $g \equiv h$ ist, wie schon aus der ersten der Gleichungen (8) hervorgeht.

Dieses Ergebnis können wir auch so aussprechen: Das Bestehen von (11) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die *Formen g und h linear abhängig* sind.

c) Schließlich finden wir: Das Erfülltsein der Beziehung

$$[f, g, h] = 0 \tag{12}$$

ist die charakteristische Bedingung dafür, daß die drei *Formen f, g, h linear abhängig* sind. Denn aus (4), (5) und (6) berechnen wir

$$[f, g, h] = 2 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{6'}$$

Geometrisch bedeutet das aber, wie wir bald sehen werden, daß es *mindestens eine Gerade* gibt, *die alle Geraden f, g, h kreuzt.*

Schon nach (9) ist (12) erfüllt, wenn zwei der Formen f, g, h übereinstimmen.

d) Wir bemerken, daß *mehr als drei* unserer *Formen immer linear abhängig* sind.

e) Der Vollständigkeit halber sei noch die Bedingung dafür genannt, daß die *Form g allein schon linear abhängig* ist; sie lautet:

$$g \equiv 0. \tag{13}$$

Es sei betont, daß wir unter einer Geraden, wenn wir von ihr schlechtweg sprechen, nie dieses „*Nullgebilde*" verstehen wollen, ohne daß dies ausdrücklich gesagt wird.

4. Schreiten wir nun zur Deutung der Invariante (4) und der Kovariante (5) für den Fall, daß sie nicht verschwinden!

a) Wir beginnen mit der Funktion $[g, h]$, die nach (5) eine quadratische Form l ist und daher, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine eigentliche Gerade darstellt; und zwar ist es auf Grund von (10) eine solche, die die beiden Geraden g und h kreuzt (d. h. senkrecht durchdringt), da für $l = [g, h]$ nach (9)

$$(g, l) = 0 \quad \text{und} \quad (h, l) = 0$$

ist. Durch explizites Niederschreiben dieser Gleichungen gemäß (4) erkennen wir, daß es unter der gemachten Voraussetzung $[g, h] \not\equiv 0$ auch nur das eine *gemeinsame Lot der beiden Geraden g und h*

$$l = \varrho [g, h] \tag{14}$$

gibt. Dieses kann allerdings, falls nämlich die Diskriminante der Form $[g, h]$ verschwindet, die absolute Fläche berühren; diese Größe ist

aber zugleich die Resultante der beiden Formen g und h, nämlich vermöge der oben angegebenen Zerlegungsformel

$$([g, h], [g, h]) = (g, g)(h, h) - (g, h)^2, \tag{15}$$

deren Verschwinden bedeutet, daß die beiden Geraden mindestens ein Ende gemein haben. Demnach gilt:

Zwei reelle Gerade besitzen genau ein reelles, eigentliches gemeinsames Lot, wenn sie nicht asymptotisch liegen; es ist dabei, wie man im einzelnen nachprüfen möge, erlaubt, daß g oder h oder g und h unendlich ferne Punkte sind. Zwei asymptotische Gerade besitzen, sofern sie nicht zusammenfallen, ihr gemeinsames Ende als einziges gemeinsames Lot.

Diese Deutung der Form l war mit unseren bisherigen Mitteln nur möglich, weil die Formen eine homogene Darstellung der Geraden bilden, d. h. weil alle zu einer Form l proportionalen Formen ϱl gleichberechtigte Darstellungen einer und derselben Geraden sind.

b) Für die Zahl (g, h) kann, wenn sie nicht verschwindet, unmöglich auf so einfachem Wege eine geometrische Deutung gefunden werden, da sie eine relative Invariante ist. Um aus ihr eine absolute Invariante zu bilden, wollen wir sie durch eine solche vom gleichen Gewicht 2 dividieren, deren uns zwei zur Verfügung stehen: (g, g) und (h, h). Um einen in g und h symmetrisch gebauten Ausdruck zu erhalten, werden wir $\sqrt{(g, g)(h, h)}$ als Divisor wählen.

Es ist bekannt, daß in einem metrischen Raum konstanter Krümmung jedes Geradenpaar g, h ein „*Maß*“ besitzt, d. i. in unserem Fall eine komplexe Zahl ϑ, deren reeller Teil der Winkel von g und h und deren imaginärer Teil der kürzeste Abstand, d. h. die Länge des gemeinsamen Lotes von g und h ist, und daß gilt[8]):

$$\cos \vartheta = (g, h) : \sqrt{(g, g)(h, h)}. \tag{16}$$

Wegen ihrer Wichtigkeit werde diese Formel hier verifiziert: Wir nehmen eine Belegung der absoluten Fläche mit komplexen Koordinaten ζ an, bei der g die unendlich fernen Punkte -1 und 1 verbindet und das gemeinsame Lot l von g und h durch den Punkt 0, also auch durch den Punkt ∞ geht. Dann drehen wir g um die sie kreuzende Gerade l durch den Winkel $\Re \vartheta$ und verschieben sie gleichzeitig längs l um die Strecke $\Im \vartheta$ — kurz, wir verschrauben g um die Größe ϑ entlang der Achse l — ; da diesem Vorgang auf der

[8]) Siehe F. Klein, l. c. S. 190 f., wo das Resultat auf einem anderen Wege gewonnen wird.

Vergl. hierzu auch eine Arbeit des Verf. in der Zeitschrift „Aus Unterricht und Forschung“ Bd. 5 (Stuttgart 1933), S. 112 ff. und S. 161 ff., bes. S. 116.

Die Bedeutung der Gleichung (10) findet sich auch auf S. 11 der in Fußnote 1 zitierten Beckschen Schrift.

Zahlenkugel die Transformation $\zeta' = e^{i\vartheta}\zeta$ entspricht, so geht g dabei in die Verbindungsgerade h der Punkte $-e^{i\vartheta}$ und $e^{i\vartheta}$ über, es kann also

$$g \equiv \xi^2 - \eta^2 \quad \text{und} \quad h \equiv e^{-i\vartheta}\xi^2 - e^{i\vartheta}\eta^2$$

gesetzt werden. Dann wird aber tatsächlich vermöge (4)

$$(g, h) : \sqrt{(g, g)\,(h, h)} = (2e^{i\vartheta} + 2e^{-i\vartheta}) : \sqrt{4 \cdot 4} = (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) : 2,$$

und dieses Ergebnis ist wegen der absoluten Invarianz des Ausdrucks (16) für jede Zahlenbelegung der Kugel gültig. — Hierdurch ist auch die Bedingung des Kreuzens (10) nocheinmal bewiesen, weil die ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ die einzigen Nullstellen der cos-Funktion sind.

Daß der Wert des Kosinus des komplexen Maßes ϑ wegen des Vorkommens von Quadratwurzeln nur bis aufs Vorzeichen bestimmt ist, kann zunächst nicht anders erwartet werden, da, vorerst wenigstens, eine quadratische Form nur eine Gerade ohne Richtungssinn darstellt.

5. Nun können wir einen Schritt weiter gehen, und zwar auf Grund der Bemerkung, daß wir durch die gleiche Behandlung aus $[g, h] \equiv l$ eine Form

$$n = [g, h] : \sqrt{(g, g)\,(h, h)}$$

bilden können, die eine Gerade darstellt, für die der Wert der Invariante (n, n) einen geometrischen Sinn haben muß; in der Tat finden wir aus (15) und (16)

$$(n, n) = \sin^2\vartheta.$$

Dies deutet aber weiter darauf hin, daß wir, um zu einer vollkommenen geometrischen Deutung der Formen g zu gelangen, durch eine solche nicht nur eine Gerade darstellen dürfen, sondern daß wir diese durch ein Gebilde ersetzen müssen, das wir als eine mit einer komplexen Zahl belegte Gerade oder, mit einem Wort, als *Schraube* bezeichnen können; diese Zahl wird eine der Quadratwurzeln aus (g, g) sein müssen, und es liegt nahe, sie die komplexe „Länge" der Schraube g zu nennen. — Statt „Schraube" hätten wir, um die Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Vektorrechnung deutlich hervortreten zu lassen, auch „komplexer Vektor" sagen können.

Durch die „Länge" kann man der Geraden als Träger der Schraube einen bestimmten Schraubungssinn aufprägen, etwa den einer Rechtsschraube, wenn das Produkt aus dem Realteil und dem Imaginärteil von ϑ positiv ist. Es wird sich später sogar als möglich erweisen, ihr durch Festlegen des Wertes der Quadratwurzel aus dem Längenquadrat einen Richtungssinn zu geben.

6. Betrachten wir die immer mehr sich abrundende Analogie mit der Vektorrechnung aufmerksam, so bemerken wir freilich, daß sie noch eine Lücke aufweist: Die linearen Transformationen (3) ändern ja

i. allg. noch die „Länge“; sie entsprechen also den äquiformen Verwandtschaften. Wir werden deshalb als Repräsentanten der Gruppe der Bewegungen des hyperbolischen Raumes von jetzt an lieber die Untergruppe der linearen Substitutionen (3) mit der Determinante 1 benutzen[9]):

$$(3') \qquad \xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

ihr gegenüber tragen alle eingeführten Invarianten und Kovarianten, speziell das Längenquadrat, von vornherein absoluten Charakter.

Auf Grund dieser Überlegungen dürfen wir nunmehr eine völlige formale Übereinstimmung der Produktbildungen (g, h) und $[g, h]$ mit dem skalaren und dem vektoriellen Produkt der uns gewohnten Vektorrechnung feststellen, solange wir uns damit begnügen, daß eine Gerade durch das Quadrat der Länge der Schraube, deren Träger sie ist, einen bestimmten Schraubensinn erhält, wir also vorläufig auf die Festlegung eines Richtungssinnes auf ihr verzichten.

7. Jetzt obliegt es uns nur noch, die geometrische Deutung der Formen g zu vervollständigen und die ihrer Summation zu finden. Das wird uns dadurch gelingen, daß wir — in Erinnerung daran, daß bei der Betrachtung der Drehungen des euklidischen Vektorraumes die Vektoren als Winkelgeschwindigkeiten eine neue Bedeutung erlangen — *stetig differenzierbare Bewegungen* des hyperbolischen Raumes betrachten; das sind nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten Transformationen, die die „Länge“ irgend eines komplexen Vektors und daher auch das für zwei beliebige derartige Vektoren g und h gebildete Skalarprodukt (g, h) ungeändert lassen, so daß es von der Zeit t nicht abhängt:

$$(17) \qquad (g, h) = \text{const.}$$

Da aus (7) und (8) formal die gleichen Differentiationsregeln folgen, wie sie in der euklidischen Vektorrechnung gelten, so erhalten wir

$$(18) \qquad (g, \dot{h}) + (\dot{g}, h) = 0;$$

speziell finden wir, wenn $g \equiv h$ ist,

$$(g, \dot{g}) = 0 \qquad \text{usw.}$$

Mit Hilfe eines beliebigen, $\dot{g}$ kreuzenden, nur mit einer geeigneten „Länge“ versehenen komplexen Vektors v können wir also — wie aus der Betrachtung von (4) und (5) zu erkennen ist —

$$\dot{g} = [v, g]$$

setzen, wobei v bis auf ein beliebiges additives Vielfaches von g bestimmt ist; ebenso wird

$$\dot{h} = [w, h].$$

[9]) Auch diese beiden Gruppen sind noch nicht holoedrisch isomorph, denn jede Bewegung wird durch zwei der Lineartransformationen (3′) repräsentiert.

Aus (18) fließt dann aber $[g, w, h] + [v, g, h] = 0$ oder

$$[v - w, g, h] = 0;$$

hieraus jedoch folgt, sofern g und h als linear unabhängig vorausgesetzt werden, — wie der Ausdruck (6′) deutlich macht — die Möglichkeit der Darstellung

$$v - w = \mu g - \nu' h.$$

Nehmen wir noch einen dritten, von g und h linear unabhängigen, die Bewegung wie g und h mitmachenden komplexen Vektor f hinzu, so bekommen wir

$$\dot{f} = [u, f]$$

und

$$u - v = \lambda f - \mu' g, \qquad w - u = \nu h - \lambda' f.$$

Folglich wird

$$(\lambda - \lambda') f + (\mu - \mu') g + (\nu - \nu') h = 0.$$

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von f, g, h schließen wir daraus:

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = \nu,$$

mithin

$$u - \lambda f = v - \mu g = w - \nu h;$$

bezeichnen wir diese drei gleichen Größen mit s, so finden wir also:

Es gibt einen komplexen Vektor s, für den gilt:

$$\dot{f} = [s, f], \quad \dot{g} = [s, g], \quad \dot{h} = [s, h].$$

Nun betrachten wir einen beliebigen, mitbewegten, komplexen Vektor p; für ihn wird nach (18)

$$(f, \dot{p}) + (\dot{f}, p) = (g, \dot{p}) + (\dot{g}, p) = (h, \dot{p}) + (\dot{h}, p) = 0,$$

somit

$$(f, \dot{p} - [s, p]) = (g, \dot{p} - [s, p]) = (h, \dot{p} - [s, p]) = 0.$$

Nun gibt es aber, wieder wegen der linearen Unabhängigkeit von f, g, h, keine Form (1), deren skalare Produkte mit f und g und h verschwinden könnten, außer der Nullform, da sie ja ein gemeinsames Lot der Geraden f, g, h darstellen müßte, das jedoch nur bei linearer Abhängigkeit von f, g, h existiert. Folglich gilt allgemein für jeden sich mitbewegenden Vektor p:[10])

$$\dot{p} = [s, p]. \tag{19}$$

[10]) Eine ähnliche Herleitung der entsprechenden Formel für den euklidischen Raum als System der in ihm enthaltenen Gewinde gab der Verf. mit Hilfe der dualen Vektoren Clifford's in einem Beitrag zur Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts, Berlin 1929, S. 210 ff.

Damit ist gezeigt, daß jede infinitesimale Bewegung des hyperbolischen Raumes durch einen gewissen komplexen Vektor s charakterisiert ist, und es ließe sich leicht die bekannte Tatsache vollends beweisen, daß sie eine infinitesimale Schraubung ist, so daß es berechtigt ist, s *die momentane Geschwindigkeitsschraube* der Bewegung zur Zeit t zu nennen. Hierin können wir eine endgültige Deutung der Formen (1) erblicken. — Der Ausdruck (19) für $\dot{p}$ zeigt, daß, sofern $s \not\equiv 0$ ist, die durch die Formen ϱs dargestellte Gerade die einzige ist, die im Augenblick t in Ruhe bleibt; daß hierbei (s, s) verschwinden darf, braucht wohl kaum gesagt zu werden.

8. Im vorigen Abschnitt hat sich nun auch ein Zugang zu einer einfachen *Deutung der Summe* zweier Schrauben eröffnet:

Auch im hyperbolischen Raum kann man die Bewegung eines Systems starr miteinander verbundener Geraden oder allgemeiner Schrauben relativ zu einem anderen derartigen „starren Geraden- oder Schraubenkörper" untersuchen. Es gilt auch hier der Satz, daß die Änderungsgeschwindigkeit irgend einer dem ersten System angehörenden Schraube p bezüglich des als ruhend geltenden Raumes, d. h. seine Absolutgeschwindigkeit gleich der Summe seiner Führungs- und seiner Relativgeschwindigkeit ist. Sind die Geschwindigkeitsschrauben dieser Bewegungen resp. s, s', s'', so ist demnach

$$[s, p] = [s', p] + [s'', p];$$

da dies für jeden Wert von p gilt, folgt:

$$s = s' + s''. \tag{20}$$

Die Summe zweier Geschwindigkeitsschrauben ist also einfach zu deuten als die Geschwindigkeitsschraube der aus den zugehörigen Bewegungen resultierenden Bewegung.

Zum Schluß sei noch die Frage aufgeworfen, ob die Koeffizienten g_1, g_2, g_3 der Form g als Komponenten oder, besser, Koordinaten des komplexen Vektors g angesehen werden können. Das würde darauf hinauslaufen, daß das Tripel der Formen

$$e_1 \equiv \xi^2, \qquad e_2 \equiv \xi\eta, \qquad e_3 \equiv \eta^2$$

als Basis benützt würde. In der Tat ist dagegen nichts einzuwenden, weil sie linear unabhängig sind. Suchen wir in der Mannigfaltigkeit der euklidischen Vektoren ein dieser Basis entsprechendes Gebilde, so stoßen wir, da nach (4)

$$\begin{aligned} &(e_1, e_1) = 0, \quad (e_2, e_3) = -1, \quad (e_3, e_3) = 0, \\ &(e_2, e_3) = 0, \quad (e_3, e_1) = 2, \quad (e_1, e_2) = 0, \\ &[e_2, e_3] = e_3, \quad [e_3, e_1] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_1, \\ &[e_1, e_2, e_3] = 2 \end{aligned}$$

ist, auf eine Basis von drei imaginären Vektoren, von denen der erste und der dritte Minimalvektoren sind, die auf dem zweiten senkrecht stehen. Solche Basen sind tatsächlich brauchbar; als Beispiel diene die aus den Vektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{i} + i\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{e}_2 = i\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{i} - i\mathfrak{k}$$

aufgebaute, wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ wie üblich, drei reelle, zu je zweien aufeinander senkrechte Einheitsvektoren bedeuten. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ erfüllen dieselben Beziehungen wie oben die Formen e_1, e_2, e_3. Es ist interessant, die bei Zugrundelegung der Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ für die Länge, das Skalar-, Vektor- und Spatprodukt sich ergebenden Ausdrücke in den Koordinaten der euklidischen Vektoren mit den entsprechenden Ausdrücken (4′), (4), (5′), (6′) in den Formenkoeffizienten zu vergleichen, ferner die Bedingungen aufzustellen, denen die Koordinaten genügen müssen, damit der durch sie dargestellte euklidische Vektor reell sei.

Die weitere Behandlung der hiermit zusammenhängenden Fragen möge einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

(Eingegangen am 31. Dezember 1949.)

Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Wilhelm Maak in Hamburg.

Eine komplexwertige Funktion $f(x)$ der Elemente x einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt dann fastperiodisch, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein System von endlich vielen, etwa n Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert, so daß 1)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_n$$

und 2) für zwei beliebige Elemente x, y eines jeden Teiles $\mathfrak{A}_i$ stets

$$\underset{c,\, d \in \mathfrak{G}}{\text{ob. Gr.}} |f(c\,x\,d) - f(c\,y\,d)| < \varepsilon$$

gilt. Ein solches System von Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, welches die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, heiße eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ von $\mathfrak{G}$.

Bekanntlich hängt die Theorie der fastperiodischen Funktionen aufs engste mit der Theorie der Normaldarstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ zusammen. Wir denken uns die irreduziblen Normaldarstellungen $D(x)$ der Gruppe zu Klassen äquivalenter Darstellungen zusammengefaßt. Jeder dieser Klassen entnehmen wir eine unitäre Darstellung. So erhalten wir ein System von unitären irreduziblen inäquivalenten Normaldarstellungen $D^{(\nu)}(x)$. Die verschiedenen Darstellungen dieses Systems werden durch verschiedene Indizes ν unterschieden. Nennt man die Zahl der Zeilen und Spalten von $D^{(\nu)}(x)$ etwa $s^{(\nu)}$, so ist

$$D^{(\nu)}(x) = \{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)\} \qquad \varrho, \sigma = 1, \ldots, s^{(\nu)}.$$

Die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ sind fastperiodisch.

Fastperiodische Funktionen besitzen einen Integralmittelwert, welcher durch das Zeichen $M\{\ldots\}$ angedeutet werde. Ist dann $f(x)$ eine fastperiodische Funktion, so nennt man die Zahlen

$$\alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} = M_x\{f(x)\,\overline{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)}\}$$

die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und schreibt

$$f(x) \sim \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{\varrho,\,\sigma=1}^{s^{(\nu)}} \alpha^{(\nu)}_{\varrho\sigma} D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x).$$

Die der Funktion $f(x)$ auf diese Weise formal zugeordnete Reihe ist die Fourierreihe von $f(x)$.

Von Bochner und v. Neumann [3] ist nach dem Vorbild der von Fejér für den Fall reinperiodischer Funktionen entwickelten Theorie eine Methode angegeben worden, wie man die im allgemeinen nicht konvergente Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion summieren kann. Als Summe der Reihe ergibt sich natürlich $f(x)$. Unabhängig von Bochner kam auf etwas andrem Wege auch van Kampen [4] zu ähnlichen Resultaten wie Bochner.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, ein Summationsverfahren anzugeben, welches sich erfolgreich auf sämtliche fastperiodischen Funktionen der Gruppe anwenden läßt. Jedem solchen Verfahren entspricht vielmehr ein gewisser umfangreichster invarianter abgeschlossener Modul fastperiodischer Funktionen, so daß die Summe der Fourierreihe einer Funktion des Moduls, welche man mit Hilfe des Verfahrens ermittelt, gerade die Funktion liefert. Derartige Moduln fastperiodischer Funktionen wollen wir Summationsmoduln nennen. Bochner und v. Neumann haben gezeigt, daß sich ein solcher Modul $\mathfrak{M}$ durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisieren läßt.

1. $\mathfrak{M}$ enthält höchstens abzählbar viele Darstellungen $D^{(\nu)}(x) = \{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)\}$, d. h. von höchstens abzählbar vielen $D^{(\nu)}(x)$ sind die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten.

2. Enthält $\mathfrak{M}$ die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ einer Darstellung $D^{(\nu)}(x)$, dann enthält $\mathfrak{M}$ auch die Funktionen $\overline{D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)}$.

3. Enthält $\mathfrak{M}$ die Funktionen $D^{(\nu)}_{\varrho\sigma}(x)$ und $D^{(\mu)}_{\varrho\sigma}(x)$ zweier Darstellungen $D^{(\nu)}(x)$ und $D^{(\mu)}(x)$, so sind auch sämtliche Produkte dieser Funktionen in $\mathfrak{M}$ enthalten.

Man sieht, daß die (stetigen) periodischen Funktionen einen Summationsmodul bilden. Deshalb kommt man im Falle der periodischen Funktionen mit einem einzigen Summationsverfahren aus.

Wir werden im folgenden sehen, daß man die Summationsmoduln auch anders charakterisieren kann. In jedem Summationsmodul $\mathfrak{M}$ kann man nämlich eine Funktion $\Phi(x)$ finden, so daß $\mathfrak{M}$ genau aus allen denjenigen Funktionen besteht, die „gleichartig fastperiodisch“ wie $\Phi(x)$ sind. Dabei heißt $f(x)$ gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, daß jede Teilung $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$ gleichzeitig eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ ist. Die Einführung dieses neuen Begriffes liegt sehr nahe, wenn man von der oben gegebenen Definition von fastperiodisch ausgeht. Die ursprüngliche von v. Neumann [2] gegebene Definition dagegen läßt einen so einfachen Vergleich der Fastperiodizität zweier Funktionen nicht zu. Wenn deshalb z. B. van Kampen in seiner Darstellung der Summationstheorie [4] im Grunde zu einem ähnlichen Resultate wie das oben genannte gekommen ist, so ist doch seine endgültige Formulierung des Ergebnisses verhältnismäßig kompliziert.

Außer von „gleichartig fastperiodisch“ werden wir in der vorliegenden Note auch von „gleichgradig fastperiodisch“ sprechen. Die Bedeutung der Worte „gleichgradig stetig“ ist allgemein bekannt. Während nun die Definition von „gleichartig fastperiodisch“ offenbar von der Vorstellung beeinflußt ist, daß fastperiodisch eine Verallgemeinerung von periodisch ist, muß man die Definition von „gleichgradig fastperiodisch“ als eine Analogisierung des erwähnten „gleichgradig stetig“ verstehen, also „fastperiodisch“ als eine Art Analogon von „stetig“ auffassen. Tatsächlich gelten für gleichgradig fastperiodische Funktionen auch durchaus entsprechende Sätze wie für gleichgradig stetige Funktionen.

Im folgenden werden die wichtigsten Stellen der Theorie von Bochner-Fejér unter Verwendung der neuen Formulierungen wiedergegeben. Das Ziel der vorliegenden Note ist der Nachweis, daß die betr. Begriffe besonders gut brauchbar sind. Es gibt in der allgemeinen Theorie fastperiodischer Funktionen viele weitere Gelegenheiten, bei denen man fast zwangsläufig auf die Definition von gleichgradig bzw. gleichartig fastperiodisch geführt wird.

§ 1.

Gleichgradig fastperiodische Funktionen.

Es sei eine Menge F von fastperiodischen Funktionen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben. Die Funktionen aus F heißen *gleichgradig fastperiodisch*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele, etwa n, Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{G}$ existieren, so daß diese Mengen $\mathfrak{A}_i$ für jede Funktion $f(x) \in F$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ bilden. Wir wollen das System von Teilmengen $\mathfrak{A}_i$ durch das Symbol $\mathfrak{T}\{F, \varepsilon\}$ bezeichnen.

Man zeigt sehr leicht, daß z. B. jede endliche Menge von fastperiodischen Funktionen gleichgradig fastperiodisch ist. Für unsere Zwecke wichtig ist folgender ebenfalls leicht beweisbare

Satz 1. *Jede gleichmäßig konvergente Folge von fastperiodischen Funktionen besteht aus gleichgradig fastperiodischen Funktionen.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist natürlich im allgemeinen nicht richtig. Es gilt aber

Satz 2. *Jede gleichgradig beschränkte Folge gleichgradig fastperiodischer Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.* Die Folge heißt gleichgradig beschränkt, wenn eine Zahl $\Gamma > 0$ existiert, so daß für alle N

$$|f_N(x)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots$$

gilt.

Beweis. Wir nennen die Menge aller $f_N(x)$ etwa F. Man setze nun nacheinander $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ und bestimme für jedes dieser ε in der Teilung $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$ ein Repräsentantensystem. Besteht $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$

aus den Mengen $\mathfrak{A}_1^{(n)}, \ldots, \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}$, so ist jede Menge von Gruppenelementen $a_1^{(n)}, \ldots, a_{r_n}^{(n)}$, welche

$$a_i^{(n)} \in \mathfrak{A}_i^{(n)} \qquad i = 1, \ldots, r_n$$

erfüllen, ein solches Repräsentantensystem. Die Elemente der Folge

$$a_1^{(1)}, \ldots, a_{r_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_{r_2}^{(2)}, a_1^{(3)}, \ldots$$

bezeichnen wir nacheinander mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Nach Voraussetzung ist

$$|f_N(a_1)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Also gibt es eine Teilfolge der $f_N(x)$, welche für a_1 konvergiert:

$$f_{1_1}, f_{1_2}, \ldots.$$

Nach Voraussetzung ist

$$|f_{1_N}(a_2)| < \Gamma \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Also gibt es eine Teilfolge der f_{1_N}, welche für a_2 konvergiert:

$$f_{2_1}, f_{2_2}, \ldots,$$

So fahren wir fort. Die Diagonalfolge f_{N_N} konvergiert offenbar für alle a_k. Ich behaupte, daß sie gleichmäßig konvergiert. Man wähle zum Beweise bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n > 3/\varepsilon$. Es muß ein N_0 geben, so daß für $M, N > N_0$

$$|f_{M_M}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(a_i^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad i = 1, \ldots, r_n.$$

Zu beliebigem $x \in \mathfrak{G}$ wird nun der Repräsentant $a_i^{(n)}$ desjenigen Teiles von $\mathfrak{T}\{F, 1/n\}$ bestimmt, welcher x enthält. Dann ist für alle $M, N > N_0$

$$\begin{aligned} |f_{M_M}(x) - f_{N_N}(x)| \leqq |f_{M_M}(x) - f_{M_M}(a_i^{(n)})| + |f_{M_M}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(a_i^{(n)})| \\ + |f_{N_N}(a_i^{(n)}) - f_{N_N}(x)| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da x willkürlich war, ist unser Satz bewiesen. —

Es sei eine Folge fastperiodischer Funktionen $f_N(x)$ mit der Fourierreihe

$$f_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma, N}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

gegeben. Außerdem sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion mit der Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x).$$

Wenn dann für alle ν, ϱ, σ gilt

$$\alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} = \lim_{N \to \infty} \alpha_{\varrho\sigma, N}^{(\nu)},$$

so heißt die Folge $f_N(x)$ *formal konvergent mit dem Limes* $f(x)$.

Satz 3. *Eine formal konvergente Folge fastperiodischer Funktionen konvergiert dann und nur dann gleichmäßig, wenn die Folge gleichgradig beschränkt und gleichgradig fastperiodisch ist.*

Der Beweis folgt aus Satz 2 und dem Eindeutigkeitssatz über Fourierreihen, bzw. aus Satz 1.

§ 2.

Majorisierbare Funktionen.

Es seien zwei fastperiodische Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Wenn dann jede Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ gleichzeitig eine Teilung $\mathfrak{T}\{g(x), \varepsilon\}$ ist, so soll das durch die Worte: „$f(x)$ *majorisiert* $g(x)$“, oder durch das Zeichen $g(x) \prec f(x)$ ausgedrückt werden. Dieser Begriff ist deshalb wichtig, weil man meist die gleichgradige Fastperiodizät einer Menge von Funktionen dadurch beweist, daß man zeigt: Alle Funktionen der Menge werden durch eine feste fastperiodische Funktion majorisiert. Für den Fall der eigentlichen fastperiodischen Funktionen findet sich eine entsprechende Definition von majorisierbar z. B. in dem Buche von Bohr [1].

Ist $\Phi(x)$ eine fastperiodische Funktion, so kann man bekanntlich zu jedem N eine fastperiodische Funktion $g_N(x)$ finden, so daß

$$|\Phi(x) - \Phi \prec g_N(x)| < \frac{1}{N}$$

ist [2]. Man setze nämlich zunächst

$$\Delta(x, y) = \underset{c,\, d \in \mathfrak{G}}{\text{ob. Gr.}} |\Phi(c\,x\,d) - \Phi(c\,y\,d)|. \tag{1}$$

Diese Funktion Δ ist fastperiodisch in beiden Variablen x und y. Weiter erklären wir

$$F_N(u) = \begin{cases} 1 - N\,u, & \text{wenn } u \leqq \frac{1}{N} \\ 0 \quad , & \text{wenn } u \geqq \frac{1}{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Dann ist

$$g_N(x) = \frac{F_N(\Delta(x, 1))}{M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}}. \tag{3}$$

Wir zeigen, daß zu jeder dieser Funktionen $g_N(x)$ eine Zahl $G_N \neq 0$ gefunden werden kann, so daß $G_N g_N(x)$ durch $f(x)$ majorisiert wird.

Satz 4. *Zu jeder der soeben erklärten Funktionen $g_N(x)$ existiert eine Zahl $G_N \neq 0$, so daß*

$$G_N g_N(x) \prec \Phi(x).$$

Beweis. Es ist wegen (2) und (3)

$$|g_N(x) - g_N(y)| \leqq \frac{N\,\Delta(x, y)}{M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}}.$$

Liegen x und y in einem Teil von $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \varepsilon\}$, so ist $\Delta(x, y) < \varepsilon$. Für $G_N = (1/N)\,M_x\{F_N(\Delta(x, 1))\}$ ist demnach unser Satz bewiesen. —

Die $g_N(x)$ sind Funktionen, welche als Analoga zu den Fejérschen Kernen aufgefaßt werden können. Wir stellen einige weitere ihrer Eigenschaften fest.

Satz 5. *Die Funktionen $g_N(x)$ sind reelle nicht negative fastperiodische Funktionen mit dem Mittelwert* 1. *Ihre Fourierreihen haben die Gestalt*

$$g_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum_{\varrho=1}^{s^{(\nu)}} D_{\varrho\varrho}^{(\nu)}(x) \tag{4}$$

Beweis. Es genügt, die Formel (4) herzuleiten. Dazu bemerken wir, daß

$$g_N(y\,x\,y^{-1}) = g_N(x)$$

ist. Eine ganz einfache Rechnung liefert dann die Behauptung (siehe [3]). —

Satz 6. *Ist $f(x)$ irgendeine fastperiodische Funktion mit* ob. Gr. $|f(x)| = \Gamma$, *so werden alle Funktionen $f \times g_N$ durch $f(x)$ majorisiert*

$$f \times g_N \prec f \tag{5}$$

und für alle N gilt

$$|f \times g_N| \leqq \Gamma. \tag{6}$$

Beweis. Es seien x_1 und x_2 aus einem Teil von $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} |f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)| &= |M_y\{(f(x_1 y^{-1}) - f(x_2 y^{-1}))\, g_N(y)\}| \\ &\leqq M_y\{|f(x_1 y^{-1}) - f(x_2 y^{-1})|\, g_N(y)\} \\ &\leqq \varepsilon\, M\{g_N\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist (5) bewiesen. Entsprechend folgt (6). —

§ 3.

Summationsmoduln.

Es sei wieder $\Phi(x)$ wie in § 2 eine beliebige fastperiodische Funktion. Mit $g_N(x)$ bezeichnen wir wieder die Funktionen, welche wir dort, von Φ ausgehend, konstruiert haben.

Satz 7. *Das System der Zahlen $\gamma_N^{(\nu)}$, welche in den Fourierreihen* (4) *der Funktionen $g_N(x)$ vorkommen, hat folgende Eigenschaft: Ist für ein ν und ein N_0 die Zahl $\gamma_{N_0}^{(\nu)} \neq 0$, so gilt für dieses ν*

$$\lim_{N \to \infty} \gamma_N^{(\nu)} = 1.$$

Beweis. Es ist

$$|g_N(x) - g_N \times g_M(x)| \leqq M_y\{|g_N(x) - g_N(x y^{-1})|\, g_M(y)\}.$$

Wenn hierin

$$|g_N(x) - g_N(x y^{-1})| > \frac{1}{M\, G_N},$$

so muß wegen Satz 4

$$\Delta(y, 1) > \frac{1}{M}$$

gelten. Folglich ist für diese y wegen der Definition (2), (3)

$$g_M(y) = 0.$$

Insgesamt ergibt sich

$$|g_N(x) - g_N \times g_M(x)| \leqq \frac{1}{M G_N} M_y\{g_M(y)\} = \frac{1}{M G_N}.$$

Läßt man nun $M \to \infty$, so müssen die $g_N \times g_M$ gleichmäßig und deshalb auch formal gegen g_N konvergieren. Da die Fourierkoeffizienten von $g_N \times g_M$ aber $\gamma_N^{(\nu)} \gamma_M^{(\nu)}$ sind, so ergibt sich für $N = N_0$

$$\gamma_{N_0}^{(\nu)} = \lim_{M \to \infty} \gamma_{N_0}^{(\nu)} \gamma_M^{(\nu)}$$

und somit wegen $\gamma_{N_0}^{(\nu)} \neq 0$ die Behauptung. —

Der kleinste zweiseitig invariante abgeschlossene Modul von fastperiodischen Funktionen, welcher alle Funktionen $g_N(x)$ enthält, soll *der zu $\Phi(x)$ gehörige Summationsmodul* $\{\Phi(x)\}$ heißen. Da $\Phi(x)$ gleichmäßig durch die $\Phi \times g_N$ approximiert wird, gehört $\Phi(x)$ selber diesem Modul an.

Satz 8. *Ist $f(x)$ irgendeine Funktion aus $\{\Phi(x)\}$, so wird $f(x)$ gleichmäßig für alle x durch die Funktionen $f \times g_N(x)$ approximiert*

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f \times g_N(x).$$

Beweis. Es sei

$$f(x) \sim \sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

die Fourierreihe von f. Dann ist

$$f \times g_N(x) \sim \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x)$$

die Fourierreihe von $f \times g_N$. Da für jedes ν mit nicht verschwindender Fouriermatrix nach Satz 7 $\lim \gamma_N^{(\nu)} = 1$ gilt, so konvergiert also $f \times g_N(x)$ wenigstens formal gegen $f(x)$. Wegen Satz 3 und Satz 6 muß die Konvergenz gleichmäßig sein. —

Dieser soeben bewiesene Satz besagt, daß wir eine für die Fourierreihen der Funktionen aus $\{\Phi(x)\}$ brauchbare Summierungsmethode gefunden haben. Ist nämlich

$$\sum s^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x) \tag{7}$$

die Fourierreihe einer Funktion aus $\{\Phi(x)\}$, so bilde man mit Hilfe der Zahlen $\gamma_N^{(\nu)}$ die Reihen

$$\sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x).$$

Diese Reihen konvergieren sicher gleichmäßig, da es sich um die Fourierreihen gefalteter Funktionen handelt. Setzt man

$$f_N(x) = \sum s^{(\nu)} \gamma_N^{(\nu)} \sum \alpha_{\varrho\sigma}^{(\nu)} D_{\varrho\sigma}^{(\nu)}(x),$$

so sind wir nun sicher, daß die Funktionen $f_N(x)$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen die zu (7) gehörige fastperiodische Funktion konvergieren. Man kann durch einfache Operationen erreichen, daß die $\gamma_N^{(\nu)}$ für eventuell auszuführende Rechnungen besonders praktisch werden. Z. B. kann man erreichen, daß bei festem N nur endlich viele $\gamma_N^{(\nu)} \neq 0$ sind, doch gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 4.

Gleichartig fastperiodische Funktionen.

Wir nennen eine fastperiodische Funktion $g(x)$ *gleichartig fastperiodisch wie* $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß jede Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \delta\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{g(x), \varepsilon\}$ ist. Unter Benutzung dieses Begriffes läßt sich folgender Satz formulieren und beweisen:

Satz 9. *Ist $\Phi(x)$ irgendeine fastperiodische Funktion, so besteht der Summationsmodul $\{\Phi(x)\}$ aus genau denjenigen Funktionen $f(x)$, welche gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$ sind.*

Beweis. Es sei $f(x)$ gleichartig fastperiodisch wie $\Phi(x)$. Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir $\delta > 0$ derart, daß $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{f(x), \varepsilon\}$ ist. Es sei dann N eine natürliche Zahl $> 1/\delta$. Wir haben

$$|f(x) - f \times g_N(x)| \leqq M_y\{|f(x) - f(x\,y^{-1})|\, g_N(y)\}.$$

Wenn hierin

$$|f(x) - f(x\,y^{-1})| \geqq \varepsilon$$

ist, so folgt für die in (1) erklärte Funktion $\Delta(x, y)$

$$\Delta(y, 1) \geqq \delta > \frac{1}{N}.$$

Für diese y ergibt sich dann aus (2) und (3)

$$g_N(y) = 0.$$

Wir haben also

$$|f(x) - f \times g_N(x)| \leqq \varepsilon\, M_y\{g_N(y)\} = \varepsilon$$

und entnehmen hieraus, daß die $f \times g_N$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren. Deshalb muß $f \in \{\Phi(x)\}$ sein.

Wenn umgekehrt $f \in \{\Phi(x)\}$, so ist zu zeigen, daß $f(x)$ gleichartig fastperiodisch ist wie $\Phi(x)$. Man wähle bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ das natürliche N so groß, daß für alle x

$$|f(x) - f \times g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Sodann wähle man $\delta > 0$ so klein, daß

$$\delta < \frac{\varepsilon\, G_N}{3\, M_y\{|f(y)|\}} \qquad f(x) \not\equiv 0$$

ist. Liegen nun x_1 und x_2 in einem Teil $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{T}\{\Phi(x), \delta\}$, so gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq |f(x_1) - f \times g_N(x_1)| + |f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)|$$
$$+ |f \times g_N(x_2) - f(x_2)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} + |f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun ist aber

$$|f \times g_N(x_1) - f \times g_N(x_2)| \leqq M_y\{|f(y)|\,|g_N(y^{-1}x_1) - g_N(y^{-1}x_2)|\}.$$

Aus Satz 4 folgt, daß dies

$$< \frac{\delta M_y\{|f(y)|\}}{G_N} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für die in $\mathfrak{A}_i$ gelegenen Elemente x_1, x_2 gilt also

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist der Satz auch in der anderen Richtung bewiesen. —

Literaturverzeichnis.

[1] H. Bohr. Fastperiodische Funktionen. Ergebnisse der Mathematik **1** Nr. 5 (1932).

[2] J. v. Neumann. Almost periodic functions in a group I. Transactions A. M. S. **36** 445—492 (1934).

[3] S. Bochner und J. v. Neumann. Almost periodic functions in a group II. Transactions A. M. S. **37** 21—50 (1935).

[4] E. R. van Kampen. Almost periodic functions and compact groups. Ann. Math. Princeton (2) **37** 48—91 (1936).

(Eingegangen am 18. November 1949.)

Einige mittels Laplace-Transformation lösbare Integralgleichungen I.

Herrn Oskar Perrón zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

J. Heinhold in München.

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungsweise von G. Doetsch[1]). Funktionen $F(t)$ der reellen Veränderlichen $t > 0$, für die das Integral $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s)$ in einer Halbebene $\Re(s) > \alpha$ konvergiert, abgekürzt $L\{F(t)\} = f(s)$, heißen L-Funktionen oder Oberfunktionen, die Resultatfunktion $f(s)$ heißt die zu $F(t)$ gehörige Unterfunktion oder l-Funktion. Funktionen $F(t)$, für die das L-Integral absolut konvergiert, werden als L_a-Funktionen, die zugehörigen Unterfunktionen als l_a-Funktionen bezeichnet. Um eine umkehrbare Eindeutigkeit in der Zuordnung der Ober- und Unterfunktionen zu erreichen, beschränken wir uns auf stetige oder einseitig stetige Funktionen $F(t)$.

Bekanntlich geht die Faltung $K(t) * Y(t) = \int_0^t K(t-\tau)\, Y(\tau)\, d\tau$, falls $L\{K(t)\} = k(s)$ absolut und $L\{Y(t)\} = y(s)$ einfach konvergiert bei der L-Transformation in das Produkt der Unterfunktionen über, $L\{K * Y\} = k(s)\, y(s)$. Hiernach lassen sich Integral- und Integrodifferentialgleichungen, in denen die auftretenden Integrale in der Gestalt von einfachen oder mehrfachen Faltungen auftreten, im Unterbereich in algebraische Gleichungen für $y(s)$ transformieren. Diese haben unter entsprechenden Voraussetzungen l-Funktionen zur Lösung, deren Oberfunktionen die vorgegebenen Integral- bzw. Integrodifferentialgleichungen erfüllen. Derartige Gleichungen, sowie Integralgleichungen, die im Unterbereich auf algebraische Differentialgleichungen führen, hat Doetsch behandelt[2]).

Neben der Faltung gibt es aber noch eine Reihe weiterer Integraloperationen, die eine gegebene und eine beliebige L-Funktion $Y(t)$ enthalten und durch die L-Transformation in einen von Integralen

[1]) Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, im folgenden als D_I bezeichnet.

[2]) Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Ann. 89 (1923), S. 192—207 und D_I Kap. 15.

freien Ausdruck im Unterbereich übergeführt werden. Hiermit lassen sich wieder gewisse Integralgleichungen in integralfreie Funktionalgleichungen für $y(s)$ des Unterbereiches transformieren. Gelingt es Lösungen dieser Funktionalgleichungen, die nun keine algebraischen Gleichungen mehr sind, in l-Funktionen zu ermitteln, so kann man wieder zu Lösungen der vorgegebenen Integralgleichungen gelangen. Sieht man hiernach die reichhaltigen Tabellen zur Laplace-Transformation von G. Doetsch [3]) durch, so erhält man eine große Zahl spezieller Integralgleichungen, für die sich Lösungen in L-Funktionen angeben lassen.

1.

Wir bringen zunächst einige Volterrasche Integralgleichungen 2. Art. Diese lassen sich natürlich auch nach der allgemeinen Theorie mit Hilfe der Neumannschen Reihe lösen, es ergibt sich jedoch hier eine einfachere Darstellung der Lösung.

$$(1) \qquad Y(t) - \alpha \int_{\alpha}^{t} \frac{t\, J_1(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\, Y(\tau)\, d\tau = G(t);$$

dabei sei $J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu + 2m}}{m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}$ die Bessel-Funktion 1. Art für den Zeiger ν, ferner werde $i^{-\nu} J_\nu(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu + 2m}}{m!\, \Gamma(\nu + m + 1)} = I_\nu(z)$ gesetzt [4]). Der Kern $K(t; \tau)$ ist hier im Bereich $0 \leqq \tau \leqq t \leqq a$ stetig, daher hat die Gleichung, falls noch $G(t)$ für $0 \leqq t \leqq a$ als stetig angenommen wird, genau eine stetige Lösung $Y(t)$.

Setzen wir $G(t)$ und ebenso $Y(t)$ als (einseitig stetige) L_a-Funktionen voraus, $L\{G(t)\} = g(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so ist die linke Seite der Gleichung (1) eine L-Funktion und zwar gehört hierzu die Unterfunktion $\frac{s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2 + \alpha^2})$. α kann dabei ein beliebiger komplexer Parameter sein. Für den Fall $\alpha = 1$ ist diese Korrespondenz angegeben in D_{II} S. 78, Formel 33. Für beliebiges α erhält man sie durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen aus der Definition der L-Transformation und der bei D_{II} S. 109/47 angegebenen Korrespondenz [5]):

Mit

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \tau \\ \dfrac{\alpha t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\, J_1(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

[3]) Berlin und Göttingen 1947, im folgenden als D_{II} bezeichnet.

[4]) Unter z^ν sei der Hauptwert $e^{\nu \log z}$, $-\pi < \arg z \leqq \pi$ verstanden.

[5]) Herrn G. Doetsch bin ich für eine briefliche Mitteilung über die Aufstellung von Korrespondenzen bei den in seiner Tabelle angeführten Operationen zu Dank verpflichtet.

ergibt sich für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$

$$L\{\Phi(t,\tau)\} = e^{-\tau s} - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, e^{-\tau\sqrt{s^2+\alpha^2}}.$$

Nach Definition der L-Transformation ist für $\Re(s) > A$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$

also

$$f(s) - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}} f(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = \int_0^\infty \left(e^{-s\tau} - \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, e^{-\tau\sqrt{s^2+\alpha^2}}\right) F(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\, \Phi(t,\tau)\, dt\right) F(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\alpha^2})\, dt\right) F(\tau)\, d\tau$$

wenn nur $\Re(s) > A$, $\Re(\sqrt{s^2+\alpha^2}) > A$ und $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$, was sicher der Fall ist, wenn nur $\Re(s) > B$ (mit hinreichend großem B) ist.

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\, d\tau\right) dt$$

$$= L\left\{\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Die Vertauschung der Integrationen ist möglich[6]), wenn

(a) $$\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| dt$$

und

(b) $$\int_0^t \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| d\tau$$

konvergieren und

(c) $$\int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau)\right| dt\right) d\tau$$

konvergiert.

---

[6]) Siehe Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, Second edition, London 1926, S. 504 bzw. D_I S. 399.

Nun gilt[7]) für $\nu > -\frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$(d) \qquad |J_\nu(z)| \leqq \frac{|(z/2)^\nu|}{\Gamma(\nu+1)} \exp|\Im(z)|.$$

Daher ist (a) für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$ konvergent. Falls $F(t)$ eine L_a-Funktion ist, konvergiert auch (b) und wegen

$$\int_\tau^\infty \left| e^{-st} \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, F(\tau) \right| dt < \frac{1}{k} e^{-k\tau}\left(\tau + \frac{1}{k}\right)|F(\tau)|$$

mit $\Re(s) - |\Im(\alpha)| = k > 0$ auch (c). Es ist also die Vertauschung der Integrationen sicher möglich, wenn wir uns auf L_a-Funktionen beschränken.

Nach Ausführung der L-Transformation erhalten wir demnach aus (1) S. 780 im Unterbereich die Gleichung

$$(A) \qquad \frac{s}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s).$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung läßt sich aber sofort angeben, nämlich

$$(B) \qquad y(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}\, g(\sqrt{s^2-\alpha^2}).$$

Diese Funktion stellt aber ihrerseits eine l-Funktion dar, zu der die Oberfunktion

$$(1') \qquad Y(t) = G(t) + \alpha \int_0^t \frac{t\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, G(\tau)\, d\tau$$

gehört, wie sich aus der oben angegebenen Korrespondenz ergibt, wenn man α durch $i\alpha$ ersetzt. (1') ist sogar eine L_a-Funktion. Es ist ja $G(t)$ nach Voraussetzung eine solche. Andererseits ist

$$|I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})| = \left|\frac{1}{i} J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\right| \leqq \frac{1}{2}|\alpha|\sqrt{t^2-\tau^2}\, \exp|\Re(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})|$$
$$\leqq \frac{|\alpha|}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\, e^{t|\Re(\alpha)|},$$

also

$$\left| \int_a^b e^{-st}\left(\int_0^t \alpha t \frac{I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}} G(\tau)\, d\tau \right) dt \right|$$
$$\leqq \int_a^b e^{-[\Re(s)-|\Re(\alpha)|]t} \cdot t\left(\int_0^t |G(\tau)|\, d\tau \right) dt.$$

[7]) G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, S. 49.

Da $G(t)$ eine L_a-Funktion, also $|G(t)|$ und damit $\int_0^t |G(\tau)|\,d\tau$, sowie $t\int_0^t |G(\tau)|\,d\tau$ L-Funktionen sind, kann für $\Re(s) - |\Re(\alpha)| \geqq \varrho > 0$, bei entsprechendem ϱ, das obige Integral beliebig klein, $< \varepsilon$, gemacht werden, wenn nur $0 < a < b < \delta(\varepsilon)$ und ebenso wenn $b > a > S(\varepsilon)$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Die Schlüsse von (1) nach (1′) lassen sich auch rückwärts durchlaufen, so daß also (1′) eine L_a-Funktion ist, die der gegebenen Integralgleichung genügt. Für den lösenden Kern der Integralgleichung (1) ergibt sich demnach der einfache Ausdruck

$$K(t:\tau) = -\frac{\alpha t}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2}).$$

Betrachten wir $Y(t)$ als gegebene und $G(t)$ als gesuchte L_a-Funktion, so erhalten wir als Lösung von (1′) die L_a-Funktion (1).

In derselben Weise ergibt sich die Lösung der Integralgleichung

$$(2) \qquad Y(t) - \alpha \int_0^t \frac{\tau J_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, Y(\tau)\,d\tau = G(t)$$

oder, indem wir anstelle von τ die Veränderliche $\lambda = \sqrt{t^2-\tau^2}$ einführen:

$$(3) \qquad Y(t) - \alpha \int_0^t J_1(\alpha\lambda)\, Y(\sqrt{t^2-\lambda^2})\,d\lambda = G(t).$$

Wenn $Y(t)$ eine L_a-Funktion ist, so ist auch wieder die linke Seite von (2) bzw. (3) eine solche, was sich wie oben beweisen läßt, und es gehört hierzu die Unterfunktion $y(\sqrt{s^2+\alpha^2})$. Das findet sich für $\alpha = 1$ bei D_{II} S. 77/29 und läßt sich allgemein aus D_{II} S. 105/3 herleiten. Damit haben wir im Unterbereich die Funktionalgleichung

$$(a) \qquad y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(b) \qquad y(s) = g(\sqrt{s^2-\alpha^2}).$$

Das ist wieder eine l_a-Funktion und zwar erhält man, indem man α durch $i\alpha$ ersetzt aus der vorigen Korrespondenz wieder die zugehörige Oberfunktion als

$$(3') \qquad Y(t) = G(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha\lambda)\, G(\sqrt{t^2-\lambda^2})\,d\lambda$$

oder $\sqrt{t^2-\lambda^2}=\tau$ gesetzt

$$(2') \qquad Y(t)=G(t)+\alpha\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}} I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\,G(\tau)\,d\tau.$$

Umgekehrt läßt sich wieder (2) bzw. (3) bei gegebener L_a-Funktion $Y(t)$ als Lösung der Integralgleichung (2') bzw. (3') auffassen.

2.

In ähnlicher Weise kann man die Lösung gewisser Volterrascher Integralgleichungen 1. Art angeben, z. B.

$$(4) \qquad \int_0^t J_0(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\,Y(\tau)\,d\tau=G(t).$$

Man kann diese Integralgleichung durch Differentiation nach t wegen $J_0'(t)=-J_1(t)$ auf die Integralgleichung (1) mit der rechten Seite $G'(t)$ zurückführen oder unmittelbar wie oben lösen. Es genügt dann anstelle der Differenzierbarkeit vorauszusetzen, daß $G(t)=\int_0^t G_1(\tau)\,d\tau$ ist, wobei $G_1(t)$ eine L_a-Funktion mit der Unterfunktion $g_1(s)$ bedeute. Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\}=y(s)$, so ist die linke Seite von (4) ebenfalls eine solche und zwar gehört hierzu die Unterfunktion

$$\frac{y(\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}},$$

wie sich aus der Korrespondenz D_{II} S. 109/43 ergibt und für $\alpha=1$ bei D_{II} S. 77/31 sich findet. Wir haben dann im Unterbereich

$$\frac{y(\sqrt{s^2+\alpha^2})}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}=\frac{1}{s}\,g_1(s)$$

mit der Lösung

$$y(s)=\frac{s}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}\,g_1(\sqrt{s^2-\alpha^2}).$$

Das ist aber die l_a-Funktion (B) S. 782, also erhält man als zugehörige Oberfunktion für $t\geqq 0$

$$Y(t)=G_1(t)+\alpha\int_0^t \frac{t}{\sqrt{t^2-\tau^2}} I_1(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\,G_1(\tau)\,d\tau.$$

Analog ergibt sich die Lösung, wenn man in (4) an die Stelle von J_0 die Funktion I_0 setzt.

Nach D_{II} S. 106/16 gilt mit

$$\Phi(t;\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqq \tau \\ \int_{\tau}^{t} J_0(\alpha(t-\lambda))\, J_0(\alpha\sqrt{\lambda^2-\tau^2})\, d\lambda & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$

$$L\{\Phi(t;\tau)\} = \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, e^{-\sqrt{s^2+\alpha^2}\,\tau}.$$

Hieraus folgt wieder in analoger Weise wie S. 781 unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\text{(A)} \qquad L\left\{\int_0^t K(t;\tau)\, Y(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2})$$

mit

$$K(t;\tau) = \int_{\tau}^{t} J_0(\alpha(t-\lambda))\, J_0(\alpha\sqrt{\lambda^2-\tau^2})\, d\lambda.$$

Diese Transformationsformel gilt sicher wieder für L_a-Funktionen $Y(t)$, wie sich entsprechend wie auf S. 781—782 unter Benutzung der Ungleichung (d) zeigen läßt.

Nehmen wir daher die Integralgleichung

$$\text{(5)} \qquad \int_0^t K(t;\tau)\, Y(\tau)\, d\tau = G(t)$$

und setzen voraus, daß $G''(t)$ eine L_a-Funktion sei, die für $t \to 0$ wie t^r mit $r > 0$ verschwindet, ferner, daß $G(0) = G'(0) = 0$ sei, so erhalten wir im Unterbereich die Gleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{s^2+\alpha^2}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = g(s)$$

mit der Lösung

$$\text{(C)} \qquad y(s) = s^2\, g(\sqrt{s^2-\alpha^2}) = s^2\, g_1(s).$$

Nun ist nach (3′) S. 783

$$L^{-1}\{g(\sqrt{s^2-\alpha^2})\} = G(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha\tau)\, G(\sqrt{t^2-\tau^2})\, d\tau = G_1(t),$$

also wegen $G(0) = G'(0) = 0$ auch $G_1(0) = G_1'(0) = 0$. Somit ist

$$Y(t) = \frac{d^2}{dt^2}\, G_1(t)$$

$$= G''(t) + \alpha \int_0^t \left(I_1(\alpha\tau)\, G''(\sqrt{t^2-\tau^2})\, \frac{t^2}{t^2-\tau^2} - G'(\sqrt{t^2-\tau^2})\, \frac{2}{\sqrt{(t^2-\tau^2)^3}} \right) d\tau,$$

$$(D)\quad Y(t) = G''(t) + \alpha \int_0^t I_1(\alpha\sqrt{t^2 - z^2}\,)\left(\frac{t^2}{z}\,G''(z) + \left(\frac{t^2}{z^2} - 1\right)G'(z)\right)\frac{dz}{\sqrt{t^2 - z^2}}.$$

Wegen der getroffenen Voraussetzungen über $G(t)$ ist wieder, wenn nur S groß genug ist, für alle s mit $\Re(s) > S$,

$$\int_a^b e^{-\Re(s)t}\left|\int_0^t I_1(\alpha\sqrt{t^2 - z^2}\,)\left(G''(t)\frac{t^2}{z} + G'(t)\left(\frac{t^2}{z^2} - 1\right)\right)\frac{dz}{\sqrt{t^2 - z^2}}\right| dt < \varepsilon,$$

falls $0 < a < b < \delta(\varepsilon)$ und ebenso, falls $b > a > T(\varepsilon)$ ist. $Y(t)$ ist somit L_a-Funktion und löst die Gleichung (5).

Differenziert man (5) zweimal, so erhält man die Integralgleichung 2. Art

$$(6)\qquad Y(t) + \int_0^t K_1(t;\tau)\,Y(\tau)\,d\tau = G''(t),$$

mit

$$K_1(t;\tau) = \frac{\alpha t}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\,J_0'(\alpha\sqrt{t^2 - \tau^2}\,) + \alpha^2 \int_0^t J_0''(\alpha(t-\lambda))\,J_0(\alpha\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}\,)\,d\lambda.$$

Ersetzt man wieder α durch $i\alpha$, so erhält man aus (D) die Lösung der Gleichungen (5) und (6), in denen J_0 durch I_0 ersetzt ist.

Wir betrachten weiterhin die Integralgleichung 1. Art

$$(7)\qquad \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}\,)\,Y(\tau)\,d\tau = G(t);$$

dabei sei $G(t)$ eine ganze Funktion vom „Exponentialtypus" (vgl. D_I S. 61), also höchstens von der Wachstumsordnung 1, $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,a_n t^n$. Eine solche ist bekanntlich eine L_a-Funktion mit der Unterfunktion $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{s^{n+1}}$. Diese Reihe hat einen endlichen Konvergenzradius. Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so ist auch die linke Seite von (7) eine solche und zwar ist nach D_{II} S. 76/18

$$(A)\qquad L\left\{\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}\,)\,Y(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,y\left(s + \frac{1}{s}\right),$$

was aus D_{II} S. 105/9 mittels der Verschiebungsregel für die Oberfunktion hergeleitet werden kann. Hiernach ergibt die Transformation von (7) in den Unterbereich

$$(B)\qquad \frac{1}{s}\,y\left(s + \frac{1}{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}},$$

woraus

$$y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n}{(s + \sqrt{s^2 - 4})^n} \tag{C}$$

folgt.

Damit ist die Lösung der Aufgabe im Unterbereich durch eine konvergente Reihe dargestellt. Die Reihenglieder sind für $\Re(s) > 2$ selbst wieder l_a-Funktionen, und es gilt nach D_{II} S. 92/64

$$\frac{1}{(s + \sqrt{s^2 - 4})^n} = L\left\{ \frac{n I_n(2t)}{2^n t} \right\}.$$

Wenden wir auf (C) die Umkehrung der L-Transformation gliedweise an, so erhalten wir zunächst formal

$$Y(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n I_n(2t). \tag{D}$$

Wir zeigen: Diese Reihe konvergiert für alle t und genügt der Integralgleichung (7).

Nach Voraussetzung ist $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$ und ebenso $G'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}$ eine ganze Funktion, konvergiert also absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Bereich $|t| \leqq r < R$. Wegen (vgl. (d), S. 782)

$$|n I_n(2t)| \leqq |t| e^{2|t|} \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!}$$

konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n I_n(2t)$ für $0 \leqq |t| \leqq r$ gleichmäßig. Daher gilt, wenn wir die Reihe (D) in die Integralgleichung (7) einsetzen

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\, Y(\tau)\, d\tau = \int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{1}{\tau} I_{2n}(2\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\, d\tau \right).$$

Nun ist aber

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau}) \frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\, d\tau = \frac{t^n}{n!} \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{E}$$

woraus die Behauptung folgt.

Die letzte Beziehung (E) läßt sich mit Hilfe der L-Transformation sofort beweisen. $\frac{n}{t} I_n(2t)$ ist L_a-Funktion, wie man sofort mittels der Abschätzung (d) von S. 782 erhält und zwar gilt das für $\Re(s) > 2$. Es

ist nach D_{II} S. 92/64

$$L\left\{\frac{n}{t} I_n(2t)\right\} = \frac{2^n}{(s+\sqrt{s^2-4})^n},$$

also nach (A) S. 786

$$L\left\{\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau})\,\frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} = L\left\{\frac{t^n}{n!}\right\},$$

woraus wegen der Stetigkeit der unter dem Operator L stehenden Funktionen die Gleichung (E) folgt.

Nach diesem Beweis können wir die Forderung, daß $G(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus sei, fallen lassen und nur fordern, daß $G(t)$ eine ganze Funktion ist, die im Nullpunkt verschwindet. Es stellt dann (D) die Lösung der Integralgleichung (7) dar, sowie der daraus durch Differentiation nach t entstehenden Gleichung 2. Art:

$$(8)\quad Y(t) - \int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}}\, J_1(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau})\, Y(\tau)\,d\tau = G'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Die Ableitung von (E) nach t ergibt

$$\frac{n}{t} I_n(2t) - \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t-\tau)\,\tau}}\, J_1(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau})\,\frac{n}{\tau} I_n(2\tau)\,d\tau = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

oder

$$(F)\qquad I_n(2t) - \int_0^t \frac{t}{\sqrt{(t-\tau)\,\tau}}\, J_1(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau})\, I_n(2\tau)\,d\tau = \frac{t^n}{n!}.$$

Hieraus folgt in gleicher Weise wie oben

$$(G)\qquad Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_n(2t)$$

als Lösung der Integralgleichung 2. Art

$$(9)\qquad Y(t) - \int_0^t \frac{t}{\sqrt{(t-\tau)\,\tau}}\, J_1(2\sqrt{(t-\tau)\,\tau})\, Y(\tau)\,d\tau = G(t),$$

wobei $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ eine ganze Funktion von t ist.

Wir betrachten schließlich noch die beiden Integralgleichungen mit speziellen rechten Seiten

$$(10)\qquad \int_0^t \alpha^{\nu}\left(\frac{t-\tau}{t+\tau}\right)^{\nu/2} J_{\nu}(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\,d\tau = \alpha^{\mu} J_{\mu}(\alpha t)$$

und

$$\int_0^t \alpha^\nu \left(\frac{t-\tau}{t+\tau}\right)^{\nu/2} I_\nu(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = \alpha^\mu I_\mu(\alpha t), \tag{11}$$

$$\Re(\mu) > \Re(\nu) > -1.$$

Ist $Y(t)$ eine L_a-Funktion, $L\{Y(t)\} = y(s)$, so erhält man wie auf S. 781 mittels der Definition der L-Transformation und der Korrespondenz D_{II} S. 112/76 für die linke Seite von (10) die Unterfunktion

$$\frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}).$$

Andererseits ist auch die rechte Seite von (10) eine L_a-Funktion mit

$$L\{\alpha^\mu J_\mu(\alpha t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\mu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$$

(vgl. D_{II} S. 89/30) für $\Re(s) > |\Im(\alpha)|$ und $\Re(\nu) > -1$. Somit lautet die in den Unterbereich transformierte Gleichung (10)

$$\frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\, y(\sqrt{s^2+\alpha^2}) = \frac{(\sqrt{s^2+\alpha^2}-s)^\mu}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$$

mit der Lösung

$$y(s) = (s-\sqrt{s^2-\alpha^2})^{\mu-\nu}.$$

Hierzu gehört (D_{II} S. 87/4) die L_a-Funktion

$$Y(t) = \frac{(\mu-\nu)\,\alpha^{\mu-\nu}}{t} I_{\mu-\nu}(\alpha t). \tag{10'}$$

Daß diese Funktion in der Tat die Gleichung (10) erfüllt, ergibt sich sofort, wenn man (10′) in (10) einsetzt und die entstehende Gleichung mittels der benutzten L-Korrespondenzen verifiziert. Ersetzt man wieder α durch $i\alpha$, so ergibt sich als Lösung von (11)

$$Y(t) = \frac{(\mu-\nu)\,\alpha^{\mu-\nu}}{t} J_{\mu-\nu}(\alpha t). \tag{11'}$$

Für $\nu = 0$ geht die linke Seite von (10) in die linke Seite der Integralgleichung (4) S. 784 über. Wir betrachten noch den Spezialfall $\alpha = 1$ dieser Integralgleichung 1. Art

$$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t) \tag{4}$$

mit einer ganzen Funktion $G(t)$, die wir uns in eine Neumannsche Reihe entwickelt denken:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(t).$$

Das Konvergenzgebiet der Neumannschen Reihe ist ein Kreis, der mit dem Konvergenzkreis der assoziierten Potenzreihe $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (t/2)^n$ zusammenfällt und die durch die Neumannsche Reihe und ihre analytische Fortsetzung definierte Funktion hat keine anderen Singularitäten als die durch die assoziierte Potenzreihe und ihre analytische Fortsetzung definierte Funktion. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (t/2)^n$ und, wegen $\left| \binom{n}{t} a_n I_n(t) \right| \leqq \frac{1}{2} e^{|t|} |a_n| \frac{|t/2|^{n-1}}{(n-1)!}$, auch $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{t} a_n I_n(t)$ für alle reellen t und für $|t| \leqq R$ gleichmäßig. Setzt man daher die Reihe

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{t} a_n I_n(t) \tag{4''}$$

in die Integralgleichung (4) ein, so wird diese, da man Summation und Integration vertauschen kann und (10′) Lösung von (10) ist, von (4″) erfüllt. Ebenso ergibt sich für dasselbe $G(t)$ als Lösung von

$$\int_0^t I_0(\sqrt{t^2 - \tau^2})\, Y(\tau)\, d\tau = G(t)$$

die ganze Funktion

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{t} a_n J_n(t).$$

Wir haben uns zunächst auf Volterrasche Integralgleichungen beschränkt. Es lassen sich in gleicher Weise die Lösungen gewisser singulärer Integralgleichungen mit unendlichem Integrationsintervall ermitteln, was in einer folgenden Note geschehen soll.

(Eingegangen am 27. Januar 1950.)

Zur Projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

G. Bol in Freiburg.

Die Projektivgeometrie der Regelflächen wurde mehrfach vom Standpunkt der Differentialgeometrie behandelt, wohl zuerst von E. J. Wilczynski[1]). Viele Autoren haben zum Ausbau der Theorie beigetragen, die dadurch zu einem gewissen Abschluß gelangt schien. Wenn wir hier trotzdem diesen Fragenkreis wieder aufgreifen, so hat das verschiedene Gründe.

Einerseits sollte eine Modernisierung der Darstellung versucht werden, wobei der Schwerpunkt von der Normierung der Vektoren und der Wahl eines invarianten Parameters verlegt wird auf die Betrachtung der Transformationsformeln bei Parameteränderung. Man gelangt so zu übersichtlichen und anpassungsfähigen Formeln, die es besonders leicht gestatten, die mit der Fläche verknüpften zweidimensionalen Gebilde geometrisch zu beherrschen. Es liegt nahe, diesen Ansatz zu machen, weil die gleiche Methode sich auch bei der Untersuchung von Raumkurven und nichtgeradlinigen Flächen bewährt hat[2]).

Der zweite neue Gesichtspunkt besteht in einer Anwendung des Hesseschen Korrespondenzprinzips. Die krummlinigen Asymptotenlinien einer Regelfläche bilden bekanntlich die Erzeugenden projektiv aufeinander ab, man kann sie daher als Elemente eines binären Gebietes auffassen. Nach Hesse läßt sich dieses Gebiet auch durch die Tangenten eines Kegelschnittes K in einer Hilfsebene E repräsentieren.

Ist nun ein Kurvenpaar auf der Regelfläche gegeben, so schneidet dieses auf jeder Erzeugenden zwei Punkte aus. Zu den Asymptotenlinien durch diese Punkte gehören zwei Tangenten von K, die durch ihren Schnittpunkt S eindeutig festgelegt werden können.

Macht man das für sämtliche Erzeugenden, so beschreibt S in E eine Kurve, die wir das *hyperbolische Bild* des Kurvenpaares auf

[1]) Vgl. insbesondere E. J. Wilczynski, Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig 1906.

[2]) Man vgl. dazu meine Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1, Göttingen 1950. Das Buch wird weiterhin mit P. D. zitiert. Für die Flächentheorie S. Comm. Math. Helv. **18**, 129—153.

unserer Regelfläche nennen. In der hyperbolischen Geometrie dieser Kurve in Bezug auf den Kegelschnitt K als absolutes Gebilde spiegeln sich nämlich projektive Eigenschaften der Regelfläche mit dem darauf liegenden Kurvenpaar.

Insbesondere können wir für unsere Kurven die *Fleknodalkurven* oder *Knotenkurven* der Regelflächen wählen [3]). Ihr hyperbolisches Bild, das durch die Regelfläche allein invariant bis auf Abbildungen der hyperbolischen Geometrie in Bezug auf K festgelegt ist, nennen wir die *Kennlinie* der Regelfläche. Sie ist dann und nur dann eine Gerade, wenn die Fläche einem linearen Komplex angehört.

Besonders interessant sind die Regelflächen — wir nennen sie Kreisregelflächen — deren Kennlinie ein Kreis der hyperbolischen Geometrie ist. Sie scheinen bisher nicht beachtet worden zu sein.

Der dritte neue Gesichtspunkt besteht in der Heranziehung der Theorie der Flächenstreifen [4]), mit deren Hilfe man viele Invarianten geometrisch deuten kann. Diese Dinge können allerdings hier nur gestreift werden.

§ 1.

Ebene hyperbolische Geometrie.

x_0, x_1, x_2 seien projektive Koordinaten in einer Ebene E, wir fassen sie zu einem Vektor

$$\mathfrak{x} = \{x_0, x_1, x_2\} \tag{1}$$

zusammen

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} x_i x_k = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0; \qquad a_{ik} = a_{ki} \text{ [5])} \tag{2}$$

sei die Gleichung eines nichtentarteten Kegelschnittes K von E, die wir uns durch die Forderung

$$|a_{ik}| = 1 \tag{3}$$

für die Determinante eindeutig normiert denken.

---

[3]) Sie bilden den Ort der Punkte, wo die krummlinigen Asymptotenlinien der Fläche Wendepunkte besitzen. Vgl. P. D. § 26 oder auch R. Sauer, Projektive Liniengeometrie, Berlin und Leipzig 1937, § 13.

[4]) Ausführlich dargestellt in P. D., Abschnitt IV.

[5]) Für die Bezeichnung vgl. etwa W. Blaschke, Projektive Geometrie, Wolfenbüttel 1948. Für zwei beliebige Vektoren ist

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} p_i q_k. \tag{1 a}$$

$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = 0$ bedeutet, daß die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in Bezug auf K konjugiert liegen.

K sei der absolute Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie und möge also reelle Punkte besitzen. Für Punkte im Innengebiet von K ist dann $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle > 0$, für Punkte im Außengebiet ist $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle < 0$ [6]).

Durch

$$\mathfrak{x}(v) = \{x_0(v), x_1(v), x_2(v)\} \tag{4}$$

sei in unserer Ebene eine Kurve gegeben, die mit K keinen Punkt und keine Tangente gemeinsam haben soll. Den Vektor $\mathfrak{x}$ denken wir uns durch die Forderung

$$\langle \mathfrak{x}(v), \mathfrak{x}(v) \rangle = \pm 1 = \varepsilon_0 \tag{5}$$

bis auf das Vorzeichen eindeutig normiert.

Aus (5) folgt durch Differentiation

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}' \rangle = 0 \text{ [7])}. \tag{6}$$

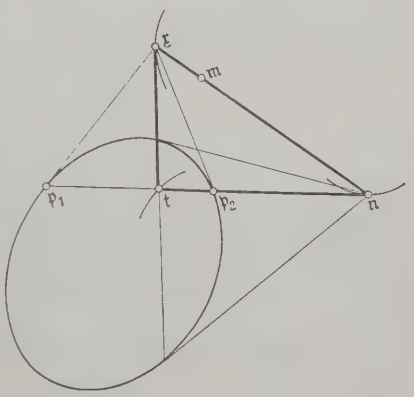

Fig. 1.

Wir setzen

$$\mathfrak{x}' = \sigma \mathfrak{t}(v) \tag{7}$$

mit

$$\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rangle = \pm 1 = \varepsilon_1 \text{ [8])} \tag{8}$$

und bestimmen den Vektor $\mathfrak{n}$ so, daß

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{n} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{n} \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{n} \rangle = \pm 1 = \varepsilon_2. \tag{9}$$

$\mathfrak{n}$ ist durch diese Bedingungen bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt.

Es gilt dann die Multiplikationstabelle

(10)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{n}$
$\mathfrak{x}$	ε_0	0	0
$\mathfrak{t}$	0	ε_1	0
$\mathfrak{n}$	0	0	ε_2

wobei natürlich die durch (1a) erklärten Produkte gemeint sind. Jeder der drei Vektoren ist bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt.

[6]) Ist der axiomatische Standpunkt maßgebend, so beschränkt man sich bekanntlich auf die Betrachtung der Punkte im Innengebiet von K, die anderen sind „unerreichbar". Bei unseren differentialgeometrischen Untersuchungen lohnt sich die Unterscheidung nicht. Wenn erwünscht, kann man im übrigen jeden unerreichbaren Punkt repräsentieren durch seine Polare an K, die stets erreichbar ist.

[7]) Akzente bedeuten Differentiation nach v. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{x}$ dreimal stetig differenzierbar ist und daß die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ linear unabhängig sind.

[8]) Wäre $\langle \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' \rangle = 0$, so würde die Tangente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ unserer Kurve K berühren, was wir ausgeschlossen hatten. Die Normierung ist daher möglich.

Die drei Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ bilden nach (10) ein Polardreieck des absoluten Kegelschnittes K. Daher liegen stets genau zwei dieser Punkte im Außengebiet und es ist

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1. \tag{11}$$

Für unsere Vektoren gelten Ableitungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \sigma \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' &= -\varepsilon_2 \sigma \mathfrak{x} + \varepsilon_0 \bar{\sigma} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' &= -\bar{\sigma} \mathfrak{t}, \end{aligned} \tag{12}$$

wie man auf Grund von (10), (11), (7) leicht bestätigt.

Bei einer Parametertransformation

$$v = f(v^*); \quad f' \neq 0, \quad \frac{dv^*}{dv} = \varphi(v) \tag{13}$$

sind die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ invariant und es ist

$$\sigma^* = \varphi^{-1} \sigma, \quad \bar{\sigma}^* = \varphi^{-1} \bar{\sigma}. \tag{14}$$

Den durch

$$s = \int \sigma \, dv \tag{15}$$

bis auf eine additive Konstante und das Vorzeichen eindeutig festgelegten invarianten Kurvenparameter nennt man die *hyperbolische Bogenlänge* unserer Kurve, die absolute Invariante

$$\varrho = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \tag{16}$$

ihre *hyperbolische Krümmung*[9]).

Führt man die hyperbolische Bogenlänge als Parameter ein, so ist

$$\sigma = 1, \quad \bar{\sigma} = \varrho. \tag{17}$$

Durchläuft $\mathfrak{x}(v)$ die Kurve, so beschreibt $\mathfrak{n}(v)$ ihre Polkurve in Bezug auf K. Die Formeln zeigen, daß die Beziehung zwischen einer Kurve und ihrer Polkurve gegenseitig ist, falls letztere nicht entartet.

Die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ ist zur Tangente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ in Bezug auf K konjugiert, sie ist also die hyperbolische Normale der Kurve (und ihrer Polkurve).

Den Punkt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \varrho \mathfrak{x} \tag{18}$$

nennen wir den hyperbolischen *Krümmungsmittelpunkt* der Kurve an der betrachteten Stelle. Wegen (12) ist nämlich

$$\mathfrak{m} = \varrho' \mathfrak{x}, \tag{19}$$

das zeigt, daß die Kurve $\mathfrak{m}(v)$ von den Normalen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ unserer Kurve berührt wird, sie ist ihre hyperbolische *Evolute*.

---

[9]) Im Sinne der Differentialgeometrie ist dies die nächstliegende Definition der Krümmung. Oft führt man aber auch $\ln \frac{1-\varrho}{1+\varrho}$ als Krümmung ein.

Ist

$$\varrho' = 0, \tag{20}$$

so ist der Punkt $\mathfrak{m}$ längs unserer Kurve fest, die Normalen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ gehen also durch einen festen Punkt. Solche Kurven nennt man *Kreise* der hyperbolischen Geometrie. Kennzeichnend für sie ist, daß ihre Krümmung ϱ konstant ist.

Für die Punkte eines solchen Kreises ist

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle = \varrho\, \varepsilon_0,$$

also

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle^2 - \varrho^2 \varepsilon_0 \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0. \tag{21}$$

Da der Vektor $\mathfrak{m}$ wegen (19), (20) fest ist, stellt (21) einen Kegelschnitt dar, der den absoluten K in seinen Schnittpunkten mit der Polaren

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{x} \rangle = 0 \tag{22}$$

des Mittelpunktes $\mathfrak{m}$ doppelt berührt.

Eine Stelle der Kurve, an der (20) gilt, nennen wir einen hyperbolischen Scheitel [10]).

Bei den Anwendungen wird uns der absolute Kegelschnitt in Parameterform gegeben sein, etwa durch

$$x_0 = u^2, \quad x_1 = -\sqrt{2}\, u, \quad x_2 = 0. \tag{23}$$

Schreibt man die Gleichung dieses Kegelschnittes in der Form

$$2\, x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \tag{24}$$

so ist die Normierungsbedingung (3) erfüllt.

Die Tangente des Kegelschnittes im Punkte (23) hat die Geradenkoordinaten

$$X_0 = 1, \quad X_1 = \sqrt{2}\, u, \quad X_2 = u^2. \tag{25}$$

Der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten

$$\mathfrak{p}_1 = \{\alpha_1^2, -\sqrt{2}\,\alpha_1, 1\}, \quad \mathfrak{p}_2 = \{\alpha_2^2, -\sqrt{2}\,\alpha_2, 1\} \tag{26}$$

hat daher die Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \alpha_1 \alpha_2, \; -\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + \alpha_2), \; 1 \right\}. \tag{27}$$

[10]) Auch in der hyperbolischen Geometrie gilt der Vierscheitelsatz: eine konvexe Kurve, die mit dem absoluten Kegelschnitt keinen Punkt gemeinsam hat, besitzt mindestens vier Scheitel. Hieraus folgen Sätze „im Großen“ über geschlossene Regelflächen mit geschlossenen Asymptotenlinien. Darauf kann hier jedoch nicht eingegangen werden.

Der Normierungsfaktor ist dabei so eingerichtet, daß für die Komponenten

$$2 x_0 x_2 - x_1^2 = -1.$$

wie es nach (5) sein soll.

Hängen α_1 und α_2 und damit auch $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{x}$ von einem Parameter v ab, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1' &= \{2\alpha_1, -\sqrt{2}, 0\}\,\alpha_1' = \left[\frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,\mathfrak{p}_1 - \sqrt{2}\,\mathfrak{x}\right]\alpha_1', \\ \mathfrak{p}_2' &= \{2\alpha_2, -\sqrt{2}, 0\}\,\alpha_2' = \left[\frac{-2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,\mathfrak{p}_2 + \sqrt{2}\,\mathfrak{x}\right]\alpha_2'. \end{aligned} \tag{28}$$

Wir wollen nun noch die Vektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ durch

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 = \tau_1 \mathfrak{p}_1, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2 = \tau_2 \mathfrak{p}_2 \tag{29}$$

umnormieren und dabei τ_1 und τ_2 so einrichten, daß

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1} = \frac{-2\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \frac{\tau_2'}{\tau_2} = \frac{-2\alpha_2'}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{30}$$

Dann folgt aus (28), daß

$$\bar{\mathfrak{p}}_1' = c_1 \mathfrak{x}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2' = c_2 \mathfrak{x}, \tag{31}$$

mit

$$c_1 = -\sqrt{2}\,\alpha_1' \tau_1, \quad c_2 = \sqrt{2}\,\alpha_2' \tau_2. \tag{32}$$

Aus (31) ergibt sich wegen $\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x} \rangle = 0$, daß

$$0 = \langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle'$$

$\langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle$ ist also konstant, und da τ_1 und τ_2 durch (30) nur bis auf konstante Faktoren festgelegt sind, können wir es so einrichten, daß

$$\langle \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2 \rangle = \tfrac{1}{2}. \tag{33}$$

Da nach (26) und wegen (24)

$$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p} \rangle = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \tag{34}$$

ist dann

$$\tau_1 \tau_2 = \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \tag{35}$$

was mit (30) im Einklang steht.

Wir führen jetzt noch die Größen

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{c_1'}{c_1}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\frac{c_2'}{c_2} \tag{36}$$

ein. Wegen (32), (35) und (30) ist dann

$$c_1 c_2 = \frac{-\alpha_1' \alpha_2'}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \tag{37}$$

$$A_1 = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_1''}{2\alpha_1'}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_2'}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2''}{2\alpha_2'}. \tag{38}$$

Für die Vektoren $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2$ gelten die Produkttabelle

(39)

	$\mathfrak{x}$	$\bar{\mathfrak{p}}_1$	$\bar{\mathfrak{p}}_2$
$\mathfrak{x}$	-1	0	0
$\bar{\mathfrak{p}}_1$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{\mathfrak{p}}_2$	0	$\frac{1}{2}$	0

und die Ableitungsgleichungen

$$\bar{\mathfrak{p}}_1' = c_1 \mathfrak{x}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_2' = c_2 \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}' = 2 c_2 \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 c_1 \bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{40}$$

Die letzte Gleichung findet man durch Differentiation von (39) unter Berücksichtigung der beiden ersten.

Die Vektoren $\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\bar{\mathfrak{p}}_2$ und die Invarianten c_1 und c_2 sind durch unsere Bedingungen nur bis auf Umnormungen von der Gestalt

$$\hat{\mathfrak{p}}_1 = k \bar{\mathfrak{p}}_1, \quad \hat{\mathfrak{p}}_2 = k^{-1} \bar{\mathfrak{p}}_2, \quad \hat{c}_1 = k c_1, \quad \hat{c}_2 = k^{-1} c_2 \tag{41}$$

mit festem, von Null verschiedenem k festgelegt.

Bei den Parametertransformationen (13) sind $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2$ invariant, während

$$c_1^* = \varphi^{-1} c_1, \quad c_2^* = \varphi^{-1} c_2, \quad A_1^* = \varphi^{-1}(A_1 - A), \quad A_2^* = \varphi^{-1}(A_2 - A), \tag{42}$$

wenn A durch

$$A = \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{43}$$

erklärt ist.

Statt (10) und (12) können wir nun ebensogut auch (39) und (40) zur Behandlung von Fragen der hyperbolischen Kurventheorie heranziehen. Die letzten Formeln haben den Vorzug, auch dann verwendbar zu sein, wenn die untersuchte Kurve mit dem absoluten Kegelschnitt Tangenten gemeinsam hat. An solchen Stellen verschwindet c_1 oder c_2.

Ist das nicht der Fall, so können wir leicht die Beziehung zwischen beiden Formelsystemen herstellen. Nach (40), (39) und (12) ist

$$\langle \mathfrak{x}', \mathfrak{x}' \rangle = 4 c_1 c_2 = \sigma^2 \langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rangle = \varepsilon_1 \sigma^2. \tag{44}$$

Der Punkt $\mathfrak{t}$ liegt daher im Innengebiet von K, wenn c_1 und c_2 das gleiche Vorzeichen haben, im Außengebiet, wenn diese Invarianten verschiedene Vorzeichen besitzen. Weiter ist nach (44)

$$\sigma = \pm 2 \sqrt{|c_1 c_2|} \tag{45}$$

und

$$\mathfrak{t} = \sigma^{-1} \mathfrak{x}' = 2 \frac{c_2}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 \frac{c_1}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{46}$$

Daher wird

$$\mathfrak{n} = -2 \frac{c_2}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_1 + 2 \frac{c_1}{\sigma} \bar{\mathfrak{p}}_2, \tag{47}$$

denn für diesen Vektor sind die Bedingungen (10) erfüllt.

Aus (47) ergibt sich durch Differentiation

$$\mathfrak{n}' = (A_2 - A_1)\,\mathfrak{t}, \tag{48}$$

so daß

$$\bar{\sigma} = A - A_1. \tag{49}$$

Aus (45) und (49) folgt wegen (15) und (16)

$$s = \pm 2 \int \sqrt{|c_1 c_2|}\, dv \tag{50}$$

$$\varrho = \frac{\pm 1}{2\sqrt{|c_1 c_2|}} (A_2 - A_1). \tag{51}$$

Damit ist der gewünschte Zusammenhang hergestellt. Die Bedingung (20) für die Scheitel nimmt hier die Form an

$$A_1' - A_1^2 = A_2' - A_2^2. \tag{52}$$

§ 2.

Das hyperbolische Bild einer Regelfläche.

Sind

$$\mathfrak{q}_1(v), \quad \mathfrak{q}_2(v)\,[11] \tag{1}$$

zwei durch gleiche Parameter eineindeutig aufeinander bezogene Raumkurven, so beschreibt die Verbindungsgerade $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ entsprechender Punkte in Abhängigkeit von v eine Regelfläche. Bekanntlich „schneiden" sich zwei benachbarte Erzeugende dann und nur dann, wenn die Determinante $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2')$ verschwindet [12]). Wir setzen daher von jetzt an

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') \neq 0 \tag{2}$$

voraus.

Die Punkte der Regelfläche werden durch

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{q}_1(v) + u\,\mathfrak{q}_2(v) \tag{3}$$

dargestellt, setzt man hier für u eine Funktion von v ein, so erhält man eine Kurve auf der Fläche, die jede Erzeugende genau einmal trifft.

Die krummlinigen Asymptotenlinien einer Regelfläche bilden bekanntlich [13]) die Erzeugenden projektiv aufeinander ab. Wählt man also für die Leitkurven (1) Asymptotenlinien und normiert die Vektoren $\mathfrak{q}_1(v)$ und $\mathfrak{q}_2(v)$ so, daß auch $\mathfrak{q}_1(v) + \mathfrak{q}_2(v)$ eine Asymptotenlinie beschreibt, so stellt (3) für jeden festen Wert von u eine Asymptotenlinie dar.

[11]) Die Vektoren haben hier natürlich vier Komponenten und stellen Punkte in einem projektiven Raum dar.

[12]) Vgl. P. D. § 14.

[13]) Vgl. P. D. § 25.

Es bleiben jetzt nur noch Umnormungen von $\mathfrak{q}_1(v)$ und $\mathfrak{q}_2(v)$ mit einem gemeinsamen Faktor $\Theta(v)$ möglich. Durch Anwendung einer solchen kann man erreichen, daß

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2') = \varkappa \tag{4}$$

eine Konstante wird, die auf Grund der Voraussetzung (2) von Null verschieden sein muß.

Setzen wir noch

$$\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{x}_2,$$

so nehmen jetzt die Ableitungsgleichungen für unsere Regelfläche die Gestalt an

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1' &= \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_1' &= Q\mathfrak{q}_1 + R\mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{q}_2' &= \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_2' &= S\mathfrak{q}_1 + T\mathfrak{q}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

[14]).

Die Tangente der Asymptotenlinie $\mathfrak{q}_1 + u\mathfrak{q}_2$ enthält nach (5) den Punkt $\mathfrak{x}_1 + u\mathfrak{x}_2$. Diese Tangente ist dann und nur dann stationär, wenn der Punkt

$$(\mathfrak{x}_1 + u\mathfrak{x}_2)' = (Q + uS)\mathfrak{q}_1 + (R + uT)\mathfrak{q}_2$$

auf ihr liegt, also wenn

$$R + u(T - Q) - Su^2 = 0. \tag{6}$$

Die durch (6) gekennzeichneten Punkte jeder Erzeugenden, in denen also die hindurchgehende Asymptotenlinie einen Wendepunkt hat, nennt man ihre *Fleknodalpunkte*. Sie beschreiben auf der Fläche die beiden *Fleknodalkurven*.

Damit die Bedingung (4) bei einer Parametertransformation (1, 13)[15]) erhalten bleibt, koppeln wir jede derartige Transformation mit einer Umnormung

$$\mathfrak{q}_1^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{q}_2^* = \varphi^{\frac{1}{2}}\mathfrak{q}_2 \tag{7}$$

der Vektoren $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$. Für $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ wird dann nach (5)

$$\mathfrak{x}_1^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{x}_1 + A\mathfrak{q}_1), \quad \mathfrak{x}_2^* = \varphi^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2 + A\mathfrak{q}_2), \tag{8}$$

wobei A durch (1, 43) erklärt ist.

Aus (8) folgt, daß die Geraden $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*)$ die bei verschiedener Wahl des Parameters v^* zu einer festen Erzeugenden gehören, einen Regulus bilden, auf dem A ein projektiver Parameter ist. Für $A = \infty$ gehört diesem Regulus auch die Erzeugende $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ selbst an. Dieser *Schmiegregulus* der Regelfläche längs der betrachteten Erzeugenden liegt auf der *Schmiegquadrik*. Die andere Geradenschar dieser Quadrik besteht aus den Tangenten der krummen Asymptotenlinien in den Punkten unserer Erzeugenden.

---

[14]) Vgl. P. D. § 25.

[15]) Damit ist Formel (13) aus § 1 gemeint.

Die Gesamtheit der Geraden aller Schmiegreguli bildet eine Kongruenz, die man die *Fleknodalkongruenz* der Regelfläche nennt.

Wir wollen nun die Formeln dadurch verallgemeinern, daß wir zwei beliebige Kurven

$$\bar{\mathfrak{q}}_1(v) = \mathfrak{q}_1(v) + \alpha_1(v)\,\mathfrak{q}_2(v), \quad \bar{\mathfrak{q}}_2(v) = \mathfrak{q}_1(v) + \alpha_2(v)\,\mathfrak{q}_2(v) \tag{9}$$

auf der Regelfläche als Leitlinien einführen. Analog zu (9) setzen wir noch

$$\bar{\mathfrak{s}}_1(v) = \mathfrak{s}_1(v) + \alpha_1(v)\,\mathfrak{s}_2(v), \quad \bar{\mathfrak{s}}_2(v) = \mathfrak{s}_1(v) + \alpha_2(v)\,\mathfrak{s}_2(v). \tag{10}$$

Dann erhalten wir mittels (5) für die neuen Vektoren Ableitungsgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{q}}_1' &= \bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{11}\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{c}_{12}\bar{\mathfrak{q}}_2 \\
\bar{\mathfrak{q}}_2' &= \bar{\mathfrak{s}}_2 + \bar{c}_{21}\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{c}_{22}\bar{\mathfrak{q}}_2 \\
\bar{\mathfrak{s}}_1' &= \bar{b}_{11}\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{b}_{12}\bar{\mathfrak{q}}_2 + \bar{c}_{11}\bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{12}\bar{\mathfrak{s}}_2 \\
\bar{\mathfrak{s}}_2' &= \bar{b}_{21}\bar{\mathfrak{q}}_1 + \bar{b}_{22}\bar{\mathfrak{q}}_2 + \bar{c}_{21}\bar{\mathfrak{s}}_1 + \bar{c}_{22}\bar{\mathfrak{s}}_2 .
\end{aligned} \tag{11}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} & c_{12} &= \frac{-\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} \\
c_{21} &= \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2} & c_{22} &= \frac{-\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2} .
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Formeln vereinfachen sich, wenn wir die Vektoren durch

$$\hat{\mathfrak{q}}_1 = \lambda_1 \mathfrak{q}_1, \quad \hat{\mathfrak{q}}_2 = \lambda_2 \mathfrak{q}_2, \quad \hat{\mathfrak{s}}_1 = \lambda_1 \mathfrak{s}_1, \quad \hat{\mathfrak{s}}_2 = \lambda_2 \mathfrak{s}_2 \tag{13}$$

umnormieren, wobei λ_1 und λ_2 den Bedingungen

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_1} = -\bar{c}_{11} = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}, \qquad \frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = -\bar{c}_{22} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{14}$$

genügen sollen. Für die neuen Vektoren führt das auf Ableitungsformeln von der Gestalt

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{q}}_1' &= \hat{\mathfrak{s}}_1 + c_1\hat{\mathfrak{q}}_2, \quad \hat{\mathfrak{s}}_1' = b_{11}\hat{\mathfrak{q}}_1 + b_{12}\hat{\mathfrak{q}}_2 + c_1\hat{\mathfrak{s}}_2 \\
\hat{\mathfrak{q}}_2' &= \hat{\mathfrak{s}}_2 + c_2\hat{\mathfrak{q}}_1, \quad \hat{\mathfrak{s}}_2' = b_{21}\hat{\mathfrak{q}}_1 + b_{22}\hat{\mathfrak{q}}_2 + c_2\hat{\mathfrak{s}}_1 .
\end{aligned} \tag{15}$$

Dabei ist

$$c_1 = \lambda_1\lambda_2^{-1}\bar{c}_{12}, \quad c_2 = \lambda_1^{-1}\lambda_2\bar{c}_{21} . \tag{16}$$

Jetzt wollen wir das in der Einleitung schon erwähnte Hessesche Korrespondenzprinzip anwenden. Wir bilden also für jeden Wert von v die Punkte (9) ab auf die Tangenten des Kegelschnittes (1, 23) die zu $u = \alpha_1, \alpha_2$ gehören, also auf die Tangenten in den durch (1, 26) dargestellten Punkten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Der Punkt $\mathfrak{x}(v)$ in (1, 27) beschreibt dabei in Abhängigkeit von v eine Kurve, die wir das *hyperbolische Bild* der Leitkurven (9) nennen.

Dann gilt der wichtige Satz:

Die durch (16) *erklärten Größen* c_1 *und* c_2 *sind mit den hyperbolischen Invarianten* (1, 32) *der Bildkurve* $\mathfrak{x}(v)$ *identisch.*

Man prüft nämlich sofort nach, daß wegen (12), (14), (16)

$$c_1 c_2 = \bar{c}_{12}\bar{c}_{21} = -\frac{\alpha_1' \alpha_2'}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{c_1'}{c_1} = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_1''}{2\alpha_1'}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\frac{c_2'}{c_2} = -\frac{\alpha_2'}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2''}{2\alpha_2'} \tag{17}$$

in Übereinstimmung mit (1, 37), (1, 38). Da die Invarianten nur bis auf Umnormungen (1, 41) festgelegt sind, folgt daraus die Behauptung.

Aus (15) folgt, daß auch

$$(\hat{\mathfrak{q}}_1, \hat{\mathfrak{q}}_2, \hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$$

eine Konstante ist.

Die Ableitungsformeln (15) sind eine Verallgemeinerung von (5), sie gehen für $c_1 = c_2 = 0$ in diese einfacheren über. Das hyperbolische Bild entartet dann in einen Punkt. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, schreiben wir deshalb statt $\hat{\mathfrak{q}}_1, \hat{\mathfrak{q}}_2, \hat{\mathfrak{s}}_2, \hat{\mathfrak{s}}_2$ auch einfach $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$.

$c_1 = 0$ bedeutet, daß die Leitkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ eine Asymptotenlinie berührt, $c_2 = 0$ daß das gleiche für $\mathfrak{q}_2(v)$ gilt.

Aus (14) folgt, daß wir λ_1 und λ_2 bei Parametertransformation ungeändert lassen können. Die Transformationsformeln für die neuen Vektoren haben dann wieder die Gestalt (7), (8). Für c_1 und A_1 findet man naturgemäß die Formeln (1, 42) wieder, während

$$\begin{aligned} b_{11} &= \varphi^{-2}(b_{11} + A' - A^2), & b_{12} &= \varphi^{-2} b_{12} \\ b_{21} &= \varphi^{-2} b_{21}, & b_{22} &= \varphi^{-2}(b_{22} + A' - A^2). \end{aligned} \tag{18}$$

Bestimmen wir noch die Asymptotenlinien unserer Fläche in der neuen Darstellung! Für die Kurve

$$\mathfrak{p}(v) = \mathfrak{q}_1(v) + u(v)\,\mathfrak{q}_2(v)$$

ist nach (15)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' &= \mathfrak{s}_1 + u\,\mathfrak{s}_2 + u c_2 \mathfrak{q}_1 + (c_1 + u')\,\mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{p}'' &= 2u c_2 \mathfrak{s}_1 + 2(c_1 + u')\,\mathfrak{s}_2 + [(u c_2)' + c_2(c_1 + u') + b_{11} + u b_{21}]\,\mathfrak{q}_1 \\ &\quad + [c_1' + u'' + u c_1 c_2 + b_{12} + u b_{22}]\,\mathfrak{q}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

$\mathfrak{p}''$ liegt also dann und nur dann in der von $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{p}'$ aufgespannten Tangentenebene der Fläche an der Stelle $\mathfrak{p}$, wenn

$$u' = c_2 u^2 - c_1. \tag{20}$$

Die Gleichung (20) *stellt also die Asymptotenlinien der Regelfläche dar.*

Setzt man (20) in (19) ein, so sieht man, daß die Tangente der Asymptotenlinie durch $\mathfrak{q}_1 + u\,\mathfrak{q}_2$ den Punkt $\mathfrak{s}_1 + u\,\mathfrak{s}_2$ enthält.

Die Gerade $(\hat{\mathfrak{s}}_1, \hat{\mathfrak{s}}_2)$ ist mit $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ identisch, gehört also dem Schmiegregulus an.

§ 3.

Die Grundabbildung. Kreisregelflächen.

Wenden wir unsere Betrachtungen an zur Untersuchung der Regelflächen mit zwei verschiedenen reellen Fleknodalkurven! Naturgemäß werden wir für sie die Fleknodalkurven als Leitkurven wählen.

Die Leitkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ ist dann und nur dann Fleknodalkurve, wenn $b_{12}=0$.

Das folgt aus (2, 19) unter Berücksichtigung von (2, 20): $\mathfrak{p}''$ ist für $u=0$ dann und nur dann eine Linearkombination von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ wenn $b_{12}=0$. Ebenso ist dann und nur dann $b_{21}=0$, wenn $\mathfrak{q}_2(v)$ eine Fleknodalkurve beschreibt.

Setzen wir noch

$$b_{11}=j+d, \quad b_{22}=j-d, \tag{1}$$

so nehmen die Ableitungsgleichungen die Form an

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_1' &= \mathfrak{s}_1 + c_1\mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{s}_1' = (j+d)\mathfrak{q}_1 + c_1\mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{q}_2' &= \mathfrak{s}_2 + c_2\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{s}_2' = (j-d)\mathfrak{q}_2 + c_2\mathfrak{s}_1 \end{aligned} \tag{2}$$

und statt (2, 18) haben wir

$$j^* = \varphi^{-2}(j + A' - A^2), \quad d^* = \varphi^{-2} d. \tag{3}$$

c_1 und c_2 sind jetzt die Invarianten des hyperbolischen Bildes der Fleknodalkurven, also der *Kennlinie* unserer Regelfläche. Wir werden versuchen, sie und die Krümmung ϱ der Kennlinie auch auf der Fläche selbst geometrisch zu deuten. Der Einfachheit halber setzen wir dabei voraus, daß die Fleknodalkurven keine Asymptotenlinie berühren, so daß c_1 und c_2 von Null verschieden sind.

Die Schmiegebene der Kurve $\mathfrak{q}_1(v)$ enthält die Punkte

$$\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{s}_1 + c_1\mathfrak{q}_2,$$
$$\mathfrak{q}_1'' = [(j+d) + c_1c_2]\mathfrak{q}_1 + 2A_1c_1\mathfrak{q}_2 + 2c_1\mathfrak{s}_2,$$

sie trifft also die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ im Punkte

$$\mathfrak{b}_1 = A_1\mathfrak{s}_1 - c_1\mathfrak{s}_2. \tag{4}$$

Ebenso stellt

$$\mathfrak{b}_2 = -c_2\mathfrak{s}_1 + A_2\mathfrak{s}_2 \tag{5}$$

den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Schmiegebene der zweiten Fleknodalkurve dar (vgl. Fig. 2).

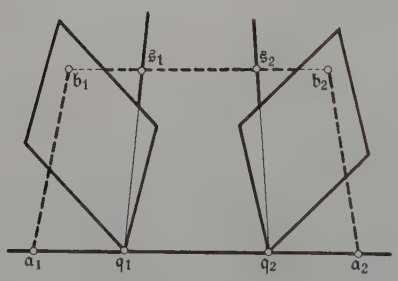

Fig. 2.

Durch $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ gehen nach § 2 die Tangenten der Asymptotenlinien in den Punkten

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= A_1\mathfrak{q}_1 - c_1\mathfrak{q}_2, \\ \mathfrak{a}_2 &= -c_2\mathfrak{q}_1 + A_2\mathfrak{q}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

unserer Erzeugenden.

Wir können nun diese Figur verwenden, um eine Abbildung der Regelfläche auf sich zu erklären, die jede Erzeugende projektiv auf sich abbildet.

Wenden wir nämlich eine Parametertransformation (1, 13) an, so bleiben zwar die beiden Schmiegebenen ungeändert, aber die Gerade $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ ändert sich, sie wird durch $(\mathfrak{s}_1^*, \mathfrak{s}_2^*)$ ersetzt. Ebenso ändern sich auch die Punkte $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Wir können nun v^* so einrichten, daß $\mathfrak{a}_1^*$ in einen beliebigen von $\mathfrak{q}_1$ verschiedenen Punkt P unserer Erzeugenden fällt. Die dann eindeutig bestimmte Lage von $\mathfrak{a}_2^*$ soll dann das Bild von P bei unserer Abbildung sein. Wir nennen die so auf jeder Erzeugenden und damit auf der Regelfläche erklärte Abbildung die *Grundabbildung* der Regelfläche.

Um das Bild von einem beliebigen von $\mathfrak{q}_1$ verschiedenen Punkt P unserer Erzeugenden zu finden, ziehe man die Tangente der hindurchgehenden Asymptotenlinie und schneide sie mit der Schmiegebene von $\mathfrak{q}_1(v)$. Durch den Schnittpunkt ziehe man die Gerade des Schmiegregulus und schneide diese mit der Schmiegebene der anderen Fleknodalkurve. Liegt dieser Schnittpunkt auf der Tangente der Asymptotenlinie durch $\overline{P}$, so ist $\overline{P}$ das Bild von P bei der Grundabbildung.

Es sei noch hervorgehoben, daß die Geraden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ und $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$ nach § 2 der Schmiegquadrik der Fläche längs unserer Erzeugenden angehören.

Rechnerisch läßt sich die Grundabbildung leicht erfassen. Beim Übergang auf einen neuen Parameter v^* ist nämlich nach (2, 7), (1, 42)

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[(A_1 - A)\,\mathfrak{q}_1 - c_1\mathfrak{q}_2] \\ \mathfrak{a}_2^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[-c_2\mathfrak{q}_1 + (A_2 - A)\,\mathfrak{q}_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Die beiden Punkte haben also auf unserer Erzeugenden die Koordinaten

$$u_1 = -\frac{c_1}{A_1 - A}, \qquad u_2 = -\frac{A_2 - A}{c_2} \tag{8}$$

zwischen denen die Beziehung besteht

$$c_2 u_2 - c_1 u_1^{-1} = A_1 - A_2 \tag{9}$$

oder

$$c_2 u_1 u_2 + (A_2 - A_1)\,u_1 - c_1 = 0. \tag{10}$$

Die Beziehungen (9) *oder* (10) *stellen also die Grundabbildung dar.* Sie ist dann und nur dann involutorisch, wenn

$$A_1 = A_2, \tag{11}$$

also wegen (1, 36) wenn

$$\frac{c_1}{c_2} = \text{konst.} \tag{12}$$

Da (11) wegen (1, 51) auf $\varrho = 0$ führt, ist in diesem Fall die Kennlinie eine Gerade. Andererseits bedeutet (12), wie man leicht nachprüft, daß die Regelfläche einem nichtentarteten linearen Komplex angehört.

Kann es sein, daß die Grundabbildung eine Asymptotenlinie der Regelfläche in eine andere überführt? Nach (2, 20) ist dann für diese Kurven

$$u_1' = c_2 u_1^2 - c_1, \qquad u_2' = c_2 u_2^2 - c_1. \tag{13}$$

Aus (9) folgt dann durch Differentiation

$$2 A_2 c_2 u_2 - 2 A_1 c_1 u_1^{-1} + A_2' - A_1' + c_2 (c_2 u_2^2 - c_1) + c_1 u_1^{-2} (c_2 u_1^2 - c_1) = 0$$

und daraus unter Berücksichtigung von (9)

$$A_1' - A_1^2 = A_2' - A_2^2, \tag{14}$$

was nach (1, 52) mit $\varrho' = 0$ gleichwertig ist.

Die Kennlinie ist also ein Kreis und die Fläche eine *Kreisregelfläche.*

Gilt andererseits (14) so zeigt eine analoge Rechnung, daß aus jeder der Bedingungen (13) die andere folgt. Also:

Führt die Grundabbildung eine Asymptotenlinie der Regelfläche in eine andere über, so gilt das für jede Asymptotenlinie und die Fläche ist eine Kreisregelfläche.

Die Doppelpunkte der Grundabbildung genügen der Gleichung

$$c_2 u^2 + (A_2 - A_1) u - c_1 = 0, \tag{15}$$

die man aus (10) erhält, indem man $u_1 = u_2 = u$ setzt. Für das Doppelverhältnis D, das diese Doppelpunkte mit den Fleknodalpunkten $u = 0$, $u = \infty$ bilden, findet man

$$2 + D + \frac{1}{D} = \pm 4 \varrho^2. \tag{16}$$

Damit ist auch für die Krümmung selbst eine Deutung auf der Fläche gefunden.

Das Doppelverhältnis der Doppelpunkte der Grundabbildung mit den Fleknodalpunkten hat dann und nur dann auf jeder Erzeugenden den gleichen Wert, wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Die beiden Doppelpunkte erzeugen die *Doppelkurven* der Grundabbildung. Auch mit ihrer Hilfe kann man die Kreisregelflächen kennzeichnen:

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind dann und nur dann Asymptotenlinien, wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Das folgt leicht aus den vorangehenden Sätzen.

Die Doppelkurven der Grundabbildung lassen sich mit Hilfe der hyperbolischen Bildebene noch in anderer Weise erklären.

Zieht man nämlich in dieser Bildebene aus $\mathfrak{n}$ die beiden Tangenten an den absoluten Kegelschnitt, so stellen diese auf der entsprechenden

Erzeugenden der Regelfläche zwei Punkte dar, die wir die *Medianpunkte* der Leitlinien nennen. Ihre Berührungspunkte mit K liegen offenbar auf der Polaren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ von $\mathfrak{u}$.

Auf der Fläche kann man die Medianpunkte so erklären: es sind die einzigen Punkte der Erzeugenden, durch die Kurven gehen, die das vorgegebene Paar auf jeder Erzeugenden harmonisch trennen und beide eine Asymptotenlinie berühren. Daraus ergibt sich mittels (2, 20) leicht, daß für sie

$$c_2 u^2 - c_1 = 0. \tag{17}$$

Zu jedem Kurvenpaar gehört in dieser Weise eindeutig ein zweites, das von den Medianpunkten erzeugt wird. Wir nennen diese Kurven die *Mediankurven* des Paares.

Die Beziehung zwischen einem Kurvenpaar und seinen Mediankurven ist umkehrbar.

Denn das gleiche gilt für die Kurven $\mathfrak{x}(r)$ und $\mathfrak{u}(r)$ der Bildebene.

Die Mediankurven der Fleknodalkurven nennt man auch *Komplexkurven*[16], weil sie jede Erzeugende in den beiden Stellen treffen, an denen die Tangente der Asymptotenlinie dem linearen Schmiegkomplex der Fläche angehört.

Wenn die Fleknodalkurven als Leitlinien gewählt werden, so stellt also (17) oder

$$\mathfrak{q}_1 \pm \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, \mathfrak{q}_2 \tag{18}$$

die Komplexkurven dar.

Zu den Fleknodalkurven und den Komplexkurven gehört auf der Fläche ein drittes Kurvenpaar, das alle beide auf jeder Erzeugenden harmonisch trennt. Diese Kurven nennt man die *harmonischen Kurven* der Fläche[16], sie werden durch

$$\mathfrak{q}_1 \pm i \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, \mathfrak{q}_2 \tag{19}$$

dargestellt. Dann gilt:

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind die Mediankurven der harmonischen Kurven.

Die Fleknodalkurven, Komplexkurven und harmonischen Kurven gehören einer einparametrigen Kurvenschar an, die die Erzeugenden der Regelfläche projektiv aufeinander abbildet. Man nennt sie die Prinzipalschar der Regelfläche. Ihre Kurven werden durch

$$u = k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \quad k = \text{konst.} \tag{20}$$

dargestellt.

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind die Örter der Punkte, in denen die Kurven der Prinzipalschar Asymptotenlinien berühren.

[16]) Vgl. etwa G. Fubini u. E. Čech, Geometria Proiettiva Differenziale Bologna 1926., Kap. IV.

Gehört der Prinzipalschar eine Asymptotenlinie oder eine Doppelkurve der Grundabbildung an, so ist die Fläche eine Kreisregelfläche.

Umgekehrt sind bei jeder Kreisregelfläche die Doppelkurven der Grundabbildung Asymptotenlinien und gehören der Prinzipalschar an.

Die Doppelkurven der Grundabbildung sind dann und nur dann mit den Komplexkurven identisch, wenn die Regelfläche einem linearen Komplex angehört.

Das folgt sofort aus (15) und (17).

§ 4.

Ausblick.

Deuten wir noch kurz an, in welcher Richtung man die Untersuchungen weiterführen kann!

Die Tangenten der Asymptotenlinien in den Punkten einer Fleknodalkurve bilden eine neue Regelfläche, welche man eine *Fleknodaltransformierte* oder *Fleknodalfläche* der ersten nennt[17]). Die beiden Fleknodalflächen sind nach Wilczynski die Brennflächen der Fleknodalkongruenz; da sich auf beiden die Asymptotenlinien entsprechen, ist diese ein W-Strahlensystem.

Man kann nun leicht die Grundabbildung auf die beiden Fleknodalflächen ausdehnen, indem man entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{x}_1$ einander zuordnet. Dadurch entsteht eine Abbildung der Fleknodalfläche auf die ursprüngliche Regelfläche, welche entsprechende Erzeugende projektiv aufeinander abbildet. Denn nach (2. 8), (3. 7) entsprechen sich bei ihr die Punkte

$$(1)\quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[\mathfrak{x}_1(v) + A\,\mathfrak{q}_1(v)], \\ \mathfrak{a}_1^* &= \varphi^{-\frac{1}{2}}[(A_1(v) - A)\,\mathfrak{q}_1(v) - c_1(v)\,\mathfrak{q}_2(v)], \end{aligned}$$

sie sind also bei festem v durch die gleichen Werte des auf beiden Erzeugenden projektiven Parameters A aufeinander bezogen.

Diese Abbildung läßt sich im übrigen auch geometrisch leicht überblicken, es gilt nämlich der Satz:

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{x}_1^*$, die sich bei der Grundabbildung entsprechen, geht durch den Kehlpunkt $\mathfrak{z}_1$ des Streifens, der die Fläche längs der Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_1(v)$ berührt.

Die durch (1) bei festem v vermittelte projektive Abbildung ist also nichts anderes als die Zentralprojektion beider Erzeugenden aufeinander mit diesem Kehlpunkt als Zentrum (vgl. Fig. 3)[18]).

[17]) Bekanntlich ist die Beziehung zwischen beiden Regelflächen gegenseitig, die gemeinsame Kurve ist auf beiden Fleknodalkurve. Man vgl. das auf S. 805 zitierte Lehrbuch von Fubini und Čech.

[18]) Diejenigen Teile der Figur, die bei Parametertransformation festbleiben, sind ausgezogen, die anderen „beweglichen“ Teile punktiert.

Die Streifen, die die Fläche längs der Fleknodalkurven berühren, nennen wir auch ihre *Fleknodalstreifen*. Auch sie lassen sich in die Grundabbildung einbeziehen.

Durch die ebengenannte Zentralprojektion werden nämlich die Erzeugenden beider Regelflächen auch projektiv abgebildet auf die Tangente der Fleknodalkurve in ihrem Schnittpunkt, in der Figur ist $\mathfrak{t}_1$ das Bild von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{z}_1$. So entsteht also eine eineindeutige Abbildung der von diesen Tangenten gebildeten Fläche auf unsere Regelfläche und ihre Fleknodaltransformierte.

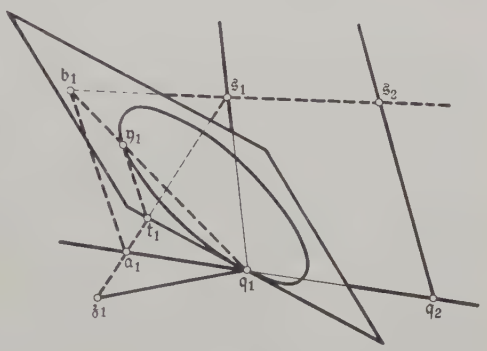

Fig. 3.

Wir können aber auch den Punkt $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ verbinden und diese Gerade mit dem Schmiegkegelschnitt des Fleknodalstreifens an der betrachteten Stelle schneiden, der Schnittpunkt ist in der Figur mit $\mathfrak{y}_1$ bezeichnet. Dadurch werden unsere Flächen auch auf die Fläche der Schmiegkegelschnitte dieses Streifens eineindeutig abgebildet.

Zwischen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ besteht aber auch eine direkte Beziehung. $\mathfrak{y}_1$ ist nämlich der Berührungspunkt der zweiten Tangente aus $\mathfrak{t}_1$ an den Schmiegkegelschnitt. Diese Abbildung der Tangentenfläche der Kurve eines Streifens auf die Fläche der Schmiegkegelschnitte spielt übrigens auch in der Streifentheorie eine wichtige Rolle [19]).

In der gleichen Weise kann man natürlich auch den anderen Fleknodalstreifen in die Grundabbildung einbeziehen.

Die analytische Behandlung der Grundabbildung gestaltet sich auch hier wieder äußerst einfach. Wie in (1), so können wir nämlich auf jeder unserer Flächen v und A als Parameter betrachten, die Abbildung wird dann stets durch gleiche Parameterwerte vermittelt. Oft ist es zweckmäßig, auch noch die Ebene der Parameter A und v zur Vermittlung heranzuziehen. Es herrschen hier ganz ähnliche Verhältnisse, wie sie auch in der Theorie der Raumkurven auftreten [20]).

Auf unseren Flächen liegen verschiedene wichtige Kurvenscharen, so auf den Fleknodalflächen die Brennkurven der Fleknodalkongruenz und die Asymptotenlinien, auf der Fläche der Schmiegkegelschnitte jedes Steifens die Zentralkurven [21]), auf der Regelfläche selbst die Asymptotenlinien, u. a. m.

[19]) Für die Streifentheorie vgl. P. D. Abschnitt IV.

[20]) Vgl. P. D., Abschnitt III, insbesondere § 48.

[21]) Vgl. P. D. § 64. Diese Kurven sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Tangente an jeder Stelle die zugehörige Tangente $(\mathfrak{a}, \mathfrak{z})$ des Streifens trifft.

Nun kann man eine Kurve auf einer unserer Flächen darstellen durch eine Gleichung der Form

$$A = F(v). \tag{2}$$

Jede der genannten Kurvenscharen wird dann durch eine Differentialgleichung der Form

$$A' - A^2 = g(v) \tag{3}$$

dargestellt.

Eine Kurvenschar, die durch eine Gleichung der Gestalt (3) dargestellt wird, nennen wir eine *harmonische Schar*. Als Grenzfall kann man auch die Schar $v =$ konst. oder $A' = \infty$ der erzeugenden Geraden oder Kegelschnitten der Fläche als harmonische Schar betrachten.

Natürlich kann man die Lösungen einer Gleichung (3) auf jeder unserer Flächen als Kurvenschar deuten, man bekommt so Kurvenscharen, die einander bei der Grundabbildung entsprechen.

Durch jeden Punkt der (A, v)-Ebene geht genau eine Kurve jeder harmonischen Schar. Sind vier harmonische Scharen gegeben, so ist das Doppelverhältnis ihrer vier Richtungen eine Ortsfunktion in der (A, v)-Ebene und auf jeder unserer Flächen. Dieses Doppelverhältnis hängt nur von v ab und ist also längs jeder erzeugenden Geraden oder jedes erzeugenden Kegelschnittes der Fläche konstant.

Zu jeder Kurve (2) der (A, v)-Ebene gibt es genau eine harmonische Schar, der sie angehört. *Zwei harmonische Scharen, die eine Kurve gemeinsam haben, fallen also ganz zusammen*[22]).

Kommt es also bei einer Regelfläche beispielsweise vor, daß $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{a}_2^*$ gleichzeitig Asymptotenlinien beschreiben, die sich daher bei der Grundabbildung entsprechen, so werden die Systeme der von $\mathfrak{a}_1^*$ und von $\mathfrak{a}_2^*$ beschriebenen Asymptotenlinien durch die gleiche Gleichung (2) dargestellt. Dann beschreibt also mit $\mathfrak{a}_1^*$ stets auch $\mathfrak{a}_2^*$ eine Asymptotenlinie. Zu diesem schon in § 3 bewiesenen Satz erhalten wir so einen neuen Zugang.

Ebenso gilt:

Gibt es eine Zentralkurve des Streifens längs $\mathfrak{q}_1(v)$, *der bei der Grundabbildung einer Zentralkurve des Streifens längs* $\mathfrak{q}_2(v)$ *entspricht, so gilt das gleiche für jede Zentralkurve. Dies tritt ein bei den Kreisregelflächen und nur bei diesen.*

Weiter ergibt sich:

Überträgt man die Zentralkurven des Streifens längs $\mathfrak{q}_1(v)$, *die Asymptotenlinien der von* $\mathfrak{s}_1^*$ *beschriebenen Fleknodalfläche und die der Regelfläche selbst, als Ort von* $\mathfrak{a}_1$ *betrachtet, mittels der Grundabbildung auf die gleiche Fläche, so trennt die Kurve der ersten Schar an jeder Stelle die der beiden anderen harmonisch von dem erzeugenden Kegelschnitt oder der erzeugenden Geraden der Fläche.*

Entsprechen sich also zwei dieser Kurvenscharen bei der Grundabbildung, so entsprechen sich alle drei.

[22]) Für die angegebenen Sätze vgl. man P. D., § 48.

Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_2(r)$ *auf der Fläche eine Projektivkurve im Sinne von B.* Segre ist[23]).

Von der gleichen Art sind folgende Sätze:

Entspricht einer von $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebenen Asymptotenlinie bei der Grundabbildung eine Brennkurve der Fleknodalkongruenz auf der von* $\mathfrak{F}_2^*$ *erzeugten Fleknodalfläche, so gilt das gleiche für jede von* $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebene Asymptotenlinie. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die Fleknodalkurve* $\mathfrak{q}_1(v)$ *eben ist.*

Ebenso entsprechen den von $\mathfrak{a}_1^*$ *beschriebenen Asymptotenlinien dann und nur dann die Brennkurven der Fleknodalkongruenz auf der von* $\mathfrak{F}_1^*$ *beschriebenen Fleknodalfläche, wenn der Streifen längs* $\mathfrak{q}_1(v)$ *auf einem Kegel liegt.*

Daraus folgt:

Hat ein Fleknodalstreifen einer Regelfläche eine ebene Kurve und liegt der andere auf einem Kegel, so ist die Fläche eine (spezielle) Kreisregelfläche.

Der Punkt $\mathfrak{a}_1^*$ fällt nach (1) dann und nur dann mit $\mathfrak{q}_2$ zusammen, wenn

$$A = A_1. \tag{4}$$

Ebenso fällt $\mathfrak{a}_2^*$ dann und nur dann mit $\mathfrak{q}_1$ zusammen, wenn

$$A = A_2. \tag{5}$$

Der Fleknodalkurve $\mathfrak{q}_2(r)$ *als Ort von* $\mathfrak{a}_1^*$ *entspricht bei der Grundabbildung dann und nur dann die Fleknodalkurve* $\mathfrak{q}_1(v)$ *als Ort von* $\mathfrak{a}_2^*$, *wenn die Regelfläche einem linearen Komplex angehört.*

Die Kurven (4) und (5) in der (A, v)*-Ebene gehören dann und nur dann der gleichen harmonischen Schar an, wenn*

$$A_1' - A_1^2 = A_2' - A_2^2, \tag{6}$$

also wenn die Fläche eine Kreisregelfläche ist.

Mit Hilfe der oben erwähnten Konstanz des Doppelverhältnisses von vier harmonischen Scharen längs jeder Erzeugenden läßt sich diese Bedingung auf den bei der Grundabbildung verwendeten Flächen geometrisch deuten.

Schließlich erwähnen wir noch einen Satz über die Fleknodalstreifen einer Regelfläche, der zur Grundabbildung keine direkte Beziehung hat:

Haben beide Fleknodalstreifen einer Regelfläche in Punkten der gleichen Erzeugenden eine sextaktische Stelle[24]*, so ist der Schmiegkomplex der Regelfläche längs dieser Erzeugenden stationär.*

Sind also beide Fleknodalstreifen einer Regelfläche sextaktisch, so gehört sie einem linearen Komplex an.

---

[23]) Vgl. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. d. Sc. fis., mat. e nat. VI, **21**. 656—660, 692—697, **22**, 400—405 (1935) und auch P. D., § 73.

[24]) Vgl. P. D. § 60.

(Eingegangen am 2. Januar 1950.)

Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

von

Wolfgang Krull in Bonn.

Einleitung.

Für die Theorie beliebiger, assoziativer, aber nicht notwendig kommutativer Ringe ist in den letzten zwei Jahrzehnten die „subdirekte" Zerlegung wichtig geworden[1]), die zwar formal ähnlich definiert wird wie die wohlbekannte „direkte" Zerlegung, die aber ihrem eigentlichen Wesen nach eine ganz andere Bedeutung besitzt. Im folgenden soll die Eigenart des Begriffes „subdirekt", sowie sein praktischer Wert an dem einfachen Beispiel der Integritätsbereiche, also der kommutativen, nullteilerfreien Ringe mit Einheitselement, genauer verdeutlicht werden. Positiv kommen wir dabei zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich unter den subdirekten Summen von abzählbar unendlichvielen vorgegebenen, höchstens abzählbaren Körpern Integritätsbereiche befinden. Auch erhalten wir das auf den ersten Blick überraschende Resultat: Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Menge von höchstens abzählbaren Körpern, die nicht alle ein und dieselbe Primzahlcharakteristik p besitzen, und gibt es unter den subdirekten Summen der $\mathfrak{K}_i$ überhaupt einen Integritätsbereich, so befindet sich unter diesen insbesondere auch der Integritätsbereich $\mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzrationalzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$. — Die kritischen Folgerungen, die aus den gewonnenen Ergebnissen gezogen werden müssen und gewisse daran anknüpfende Vorschläge zur Terminologie sind in dem Schlußparagraphen (§ 6) zusammengefaßt.

[1]) Die vorliegende Note wurde angeregt durch den ausführlichen und zur ersten Einführung in die Theorie der subdirekten Zerlegungen ausgezeichnet geeigneten Bericht von Neal H. Mc Coy: Subdirekt sums of rings Bull. Americ. Math. Soc. (1947), S. 856—877. (In Zukunft kurz mit Mc Coy zitiert.)

§ 1.

Die Grundbegriffe [2]).

Es sei M eine beliebige Menge, $M_{\mathfrak{R}}$ sei eine Menge von Ringen $\mathfrak{R}_\alpha$, die umkehrbar eindeutig den Elementen α von M entsprechen; 0_α sei das Nullelement aus $\mathfrak{R}_\alpha$. Von einer Funktion $f(x)$ auf M (oder auch auf $M_{\mathfrak{R}}$) wird gesprochen, wenn jedem $\alpha \in M$ eindeutig ein Funktionswert $f(\alpha) = a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$ zugeordnet ist. Summe und Produkt zweier Funktionen werden in üblicher Weise definiert [3]). Die Menge aller Funktionen $f(x)$ auf M bildet einen Ring $\mathfrak{S}^*$, dessen Struktur durch die Strukturen der Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ eindeutig bestimmt ist, und der als die *direkte Summe* der $\mathfrak{R}_\alpha$ bezeichnet wird [4]).

Satz 1. *Ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann zu einem Unterringe $\mathfrak{S}$ der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ isomorph, wenn jedem $\alpha \in M$ eindeutig (aber nicht notwendig umkehrbar eindeutig) ein zweiseitiges $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$ so zugeordnet werden kann, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ jeweils zu einem Unterring $\mathfrak{U}_\alpha$ von $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph ist, und daß gleichzeitig der Durchschnitt $\underset{\alpha}{\Delta}\, \mathfrak{m}_\alpha$ aller $\mathfrak{m}_\alpha$ gleich dem Nullideal wird* [5]).

Beweis. a) Ist $\mathfrak{S}$ ein Unterring von $\mathfrak{S}^*$, so bildet die Menge aller der $f(x) \in \mathfrak{S}$, die der Bedingung $f(\alpha) = 0_\alpha$ genügen, ein zweiseitiges $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{m}_\alpha$, und es wird $\mathfrak{S}/\mathfrak{m}_\alpha$ isomorph zum Unterring $\mathfrak{U}_\alpha$ aller der $b_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$, zu denen es ein $g(x) \in \mathfrak{S}$ mit $g(\alpha) = b_\alpha$ gibt. Offenbar wird $\underset{\alpha}{\Delta}\, \mathfrak{m}_\alpha = (0)$. — b) Es seien in $\mathfrak{R}$ die Ideale $\mathfrak{m}_\alpha$ gemäß Satz 1 gegeben, und es bedeute für beliebiges $b \in \mathfrak{R}$ stets b_α das Element aus $\mathfrak{R}_\alpha$, das der Restklasse $b + \mathfrak{m}_\alpha$ aus $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ vermöge des zwischen $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ und $\mathfrak{U}_\alpha$ bestehenden Isomorphismus zugeordnet ist. Lassen wir dann jedem $b \in \mathfrak{R}$ die durch $f(\alpha) = b_\alpha$ $(\alpha \in M)$ eindeutig definierte Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{S}^*$ entsprechen, so wird wegen $\underset{\alpha}{\Delta}\, \mathfrak{m}_\alpha = (0)$ offen-

---

[2]) In der Terminologie und vor allem in der „Funktionsschreibweise" schließen wir uns im wesentlichen an Mc Coy an. Anders ist die Bezeichnungsart z. B. bei Bourbaki, vgl. [4]).

[3]) Es ist also $g(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha)$ bzw. $g(\alpha) = f_1(\alpha) \cdot f_2(\alpha)$, falls $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ bzw. $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

[4]) Die Bezeichnungsweise entspricht der von Mc Coy. Man beachte die folgenden Punkte: a) Nach unserer Definition sind die Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ von $\mathfrak{S}^*$ keineswegs Unterringe von $\mathfrak{S}^*$, sondern es gibt nur zu jedem $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}^*$ ein zu $\mathfrak{R}_\alpha$ als Ring isomorphes zweiseitiges Ideal (bestehend aus der Menge aller Funktionen $f(x)$ mit $f(\beta) = 0_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$). — b) Die Terminologie des Textes ist weder für Moduln noch für Ringe in der Literatur allgemein üblich, z. B. definiert Bourbaki für Moduln die direkte Summe so, daß sie in der Mc Coy-schen Bezeichnungsweise eine minimale spezielle subdirekte Summe im Sinne von [15]) darstellt. (Bourbaki, Teil I, Bd. II (Algèbre), Kap. VI (Algèbre linéaire), insbesondere S. 13.)

[5]) Eine leichte Verallgemeinerung von Mc Coy, Satz 3, vgl. [6]).

bar $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\underset{\alpha}{\Delta}\,\mathfrak{m}_\alpha$ zu dem aus allen so erklärten Funktionen $f(x)$ bestehenden Unterring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}^*$ isomorph. — Nennt man weiter den Unterring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}^*$ eine *subdirekte Summe* der $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn der beim Beweise von Satz 1 unter a) gebildete Ring $\mathfrak{U}_\alpha$ für jedes α mit $\mathfrak{R}_\alpha$ zusammenfällt, so folgt aus Satz 1 sofort:

Satz 2. *$\mathfrak{R}$ läßt sich dann und nur dann als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellen, d. h. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann zu einer subdirekten Summe $\mathfrak{S}$ der $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph, wenn in $\mathfrak{R}$ die Ideale $\mathfrak{m}_\alpha$ mit $\underset{\alpha}{\Delta}\,\mathfrak{m}_\alpha = (0)$ so bestimmt werden können, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}_\alpha$ jeweils zu $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorph wird*[6]).

Da bei jedem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement (insbesondere bei jedem Integritätsbereich) $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ dann und nur dann ein Körper wird, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ ein maximales (von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes) $\mathfrak{R}$-Ideal (und damit gleichzeitig ein Primideal) ist, ergibt sich aus Satz 2 insbesondere:

Satz 3. *Der kommutative Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement ist dann und nur dann als subdirekte Summe von Körpern darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ der Durchschnitt aller maximalen Ringprimideale gleich dem Nullideal wird*[7]).

§ 2.

Darstellbarkeit von Integritätsbereichen als subdirekte Summen.

Aus Satz 3 von § 1 folgt sofort: Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist sicher *nicht* als subdirekte Summe von Körpern darstellbar, wenn er nur endlichviele verschiedene maximale Primideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ enthält[8]). Denn wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{J}$ ist ja $\mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \ldots \cap \mathfrak{m}_s \neq (0)$. Insbesondere kann demnach ein *Stellenring*, d. h. ein Integritätsbereich mit nur einem einzigen maximalen Primideal niemals subdirekte Körpersumme sein. Daß auch Integritätsbereiche mit unendlichvielen maximalen Primidealen existieren, die sich nicht als subdirekte Körpersummen darstellen lassen, zeigt das folgende Beispiel eines Durchschnitts von unendlichvielen „zweistufigen Bewertungsringen“[9]):

[6]) Mc Coy, Satz 3. Beachtet man den bekannten Zusammenhang zwischen zweiseitigen Idealen und Homomorphismen, so sieht man sofort, daß unser Satz 2 auch so formuliert werden könnte: $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$ darstellbar, wenn für jedes α ein Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\alpha$ existiert, und wenn dabei kein $a \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ durch alle diese Homomorphismen auf 0_α abgebildet wird (Mc Coy, Satz 2).

[7]) Folgt bei Mc Coy aus einem allgemeineren Theorem von Jacobson, vgl. [17]).

[8]) Unter einem Integritätsbereich schlechtweg verstehen wir stets einen echten Integritätsbereich, also einen Nicht-Körper.

[9]) Vgl. W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie. I. f. Math. 167 (1931), S. 160—196, insbesondere § 6.

Es sei $\mathfrak{J}$ der Ring aller der Polynomquotienten $\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ über einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$, bei denen, falls wir $p(x, y) = x \cdot p_1(x, y) + r(y)$, $q(x, y) = x \cdot q_1(x, y) + s(y)$ setzen, die Bedingungen $s(y) \neq 0$, $r(y) \equiv 0 (s(y))$ erfüllt sind. Dann bildet in $\mathfrak{J}$ die Menge aller $\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ mit $r(y) = 0$ ein Primideal $\mathfrak{p}^* \neq (0)$, dessen Elemente durch jeden Quotienten $\frac{\tilde{p}(x, y)}{\tilde{q}(x, y)}$ mit $\tilde{p}(x, y) \not\equiv 0 (x)$ teilbar sind, und es ist $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}^*$ zu $\mathfrak{K}[y]$ isomorph, ja es liefern sogar die Elemente von $\mathfrak{K}[y]$ ein volles Restsystem von $\mathfrak{J}$ modulo $\mathfrak{p}^*$. Daraus folgt mühelos, daß jedes maximale $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}$ die Gestalt $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}^*, i(y))$ besitzt, wobei $i(y)$ ein irreduzibles Polynom aus $\mathfrak{K}[y]$ bedeutet, und daß auch alle Ideale dieses Typs maximale $\mathfrak{J}$-Primideale sind. Es gibt also in $\mathfrak{J}$ unendlichviele maximale Primideale und ihr Durchschnitt ist $\mathfrak{p}^* \neq (0)$. Nach Satz 3 kann daher $\mathfrak{J}$ nicht als subdirekte Körpersumme dargestellt werden [10]).

Wir kehren jetzt die Fragestellung gewissermaßen um, indem wir uns nicht mehr einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ sondern eine Körpermenge $M_{\mathfrak{K}}$ gegeben denken und festzustellen suchen, wann unter den subdirekten Summen der $\mathfrak{K}_\alpha$ ($\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{K}}$) sich Integritätsbereiche befinden. Zunächst erhalten wir drei Sätze von negativem Charakter.

Satz 4. *Eine subdirekte Summe von endlichvielen Körpern $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ ist nie ein Integritätsbereich.*

Es sei nämlich $\mathfrak{S}$ eine subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ und es sei das $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{m}_i$ wie beim Beweis von Satz 1 unter a) definiert. Dann ist $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_n = (0)$. Ist nun etwa $\mathfrak{m}_1 = (0)$, so ist $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{K}_1$ isomorph und somit ein Körper. Ist aber $\mathfrak{m}_i \neq (0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $\mathfrak{S}$ wegen $\mathfrak{m}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{m}_n = (0)$ nicht nullteilerfrei.

Satz 5. *Liegt bei allen Körpern $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{K}}$ die Elementezahl unter einer festen Schranke N, so ist keine subdirekte Summe $\mathfrak{S}$ der $\mathfrak{K}_\alpha$ ein Integritätsbereich.*

Unter unserer Voraussetzung läßt sich nämlich $M_{\mathfrak{K}}$ so in endlichviele paarweise elementefremde Mengen $M_{\mathfrak{K}}^1, \ldots, M_{\mathfrak{K}}^n$ aufteilen, daß alle Körper der Menge $M_{\mathfrak{K}}^i$ zu einem festen endlichen Körper, etwa zu einem der Elementezahl z_i, isomorph sind. Es ist dann jedes Element aus einem Körper der Menge $M_{\mathfrak{K}}^i$ Nullstelle des Polynoms $u^{z_i} - u$. Setzen wir ferner $P(u) = \prod_{i=1}^{n} (u^{z_i} - u)$, so wird $P(f(x)) = 0$ für jede Funktion $f(x) \in \mathfrak{S}$. Im Falle der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{S}$ kann daher $\mathfrak{S}$ höchstens $z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$ verschiedene Elemente enthalten, woraus elementar folgt, daß $\mathfrak{S}$ ein Körper sein muß.

---

[10]) Auf eine systematische Methode zur Konstruktion von nicht als subdirekte Körpersummen darstellbaren Integritätsbereichen mit unendlich vielen maximalen Primidealen soll in einer späteren Note in etwas anderem Zusammenhang kurz eingegangen werden.

Satz 5 dient als Grundlage für das folgende, allgemeinere Theorem:

Satz 6. *Es sei $M_{\mathfrak{R}}$ eine Menge von Körpern $\mathfrak{K}_\alpha$, von denen mindestens zwei verschiedene Charakteristik besitzen. $M_{\mathfrak{R}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{R}}^p$ sei die Menge aller der $\mathfrak{K}_\alpha$, die die Charakteristik 0 bzw. die Primzahlcharakteristik p haben. Ist dann $M_{\mathfrak{R}}^0$ endlich, und gibt es endlichviele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ derart, daß die Elementezahlen aller $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}} - (M_{\mathfrak{R}}^0 \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_1} \cup \ldots \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_n})$ unterhalb einer festen Schranke N liegen, so gibt es keinen als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_\alpha$ darstellbaren Integritätsbereich.*

Es genügt offenbar zu zeigen: Ist in einem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedem $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}$ ein Primideal $\mathfrak{m}_\alpha$ so zugeordnet, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_\alpha$ zu $\mathfrak{K}_\alpha$ isomorph wird, so kann der Durchschnitt $\mathfrak{a}$ aller $\mathfrak{m}_\alpha$ niemals gleich dem Nullideal sein. — Wegen der Annahme, daß mindestens zwei $\mathfrak{K}_\alpha$ charakteristikungleich sind, muß der betrachtete Integritätsbereich die Charakteristik 0 haben, d. h. wir können und wollen $\mathfrak{J}$ als Oberring des Ringes $\mathfrak{J}_0$ der ganzen rationalen Zahlen annehmen. Setzen wir nun $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bzw. $\mathfrak{a}_\omega$ gleich dem Durchschnitt aller der Primideale $\mathfrak{m}_\alpha$, die Körpern aus der Menge $M_{\mathfrak{R}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{R}}^{p_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ bzw.

$$M_{\mathfrak{R}} - (M_{\mathfrak{R}}^0 \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_1} \cup \ldots \cup M_{\mathfrak{R}}^{p_n})$$

entsprechen, so wird $\mathfrak{a}_0 \neq (0)$ nach Satz 4 und $\mathfrak{a}_\omega \neq (0)$ nach Satz 5. Außerdem muß wegen der Primzahlcharakteristik p_i aller $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}^{p_i}$ die von 0 verschiedene Primzahl p_i in $\mathfrak{a}_i$ enthalten sein, wir haben also auch $\mathfrak{a}_i \neq (0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und damit $\bigcap_\alpha \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{a} \neq (0)$ wegen $\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{a}_n \cdot \mathfrak{a}_\omega \leq \mathfrak{a}$. — Für den Fall einer Menge von Körpern gleicher Charakteristik erhalten wir als Ergänzung zu dem bewiesenen Satz 6 auf Grund von Satz 4 und Satz 5 unmittelbar:

Satz 6a. *Es sei $M_{\mathfrak{R}}$ eine Menge von Körpern $\mathfrak{K}_\alpha$ gleicher Charakteristik, $M_{\mathfrak{R}}^\infty$ die Untermenge aller der $\mathfrak{K}_\alpha$, die unendliche Elementezahlen haben. Ist dann $M_{\mathfrak{R}}^\infty$ endlich und liegen die Elementezahlen aller $\mathfrak{K}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}} - M_{\mathfrak{R}}^\infty$ sämtlich unter einer festen Schranke N, so gibt es keinen als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_\alpha$ darstellbaren Integritätsbereich $\mathfrak{J}$.*

Selbstverständlich ist Satz 6a nur im Falle einer Primzahlcharakteristik von Interesse. Für den Fall der Charakteristik 0 wird $M_{\mathfrak{R}}^\infty = M_{\mathfrak{R}}$, und die Behauptung reduziert sich auf die von Satz 4. Man beachte übrigens, daß jede subdirekte Summe einer Körpermenge $\mathfrak{K}_\alpha$ die Primzahlcharakteristik p besitzen muß, falls alle $\mathfrak{K}_\alpha$ diese Charakteristik haben. — Auf Satz 5 und Satz 6 stützt sich ein Hilfssatz über abzählbare Integritätsbereiche, den wir hier in etwas allgemeinerer Fassung beweisen als wir ihn später in § 3 benötigen:

Satz 7. *Es seien* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ *abzählbar unendlichviele maximale Primideale aus dem abzählbaren Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *mit* $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$. *Haben dann mindestens zwei der Restklassenkörper* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *verschiedene Charakteristik, so läßt sich aus den* $\mathfrak{m}_i$ *eine Teilfolge* $\mathfrak{m}_{i_1}, \mathfrak{m}_{i_2}, \ldots$ *mit* $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ *stets so auswählen, daß die Restklassenkörper* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *entweder alle Charakteristik* 0 *haben oder sämtlich unendlich sind und paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken besitzen oder sämtlich endlich sind, paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken besitzen und der Bedingung genügen, daß ihre Elementezahlen mit wachsendem* k *echt monoton wachsen*[11]. — *Haben andererseits alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *die gleiche Primzahlcharakteristik* p, *so kann die Teilfolge* $\mathfrak{m}_{i_k}$ *mit* $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ *immer so bestimmt werden, daß entweder alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *unendlich sind oder daß alle* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *endlich sind, und daß gleichzeitig die Elementezahlen der* $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ *mit wachsendem* k *monoton wachsen.*

Es genügt, den Hauptfall der nicht charakteristikgleichen $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ zu behandeln. Es sei $M_{\mathfrak{m}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^e$ die Menge aller der $\mathfrak{m}_i$, für die $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}$ Charakteristik 0 hat bzw. unendlich und von Primzahlcharakteristik bzw. endlich ist; $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\mathfrak{a}_\omega$ bzw. $\mathfrak{a}_e$ sei der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_i$ aus $M_{\mathfrak{m}}^0$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^e$. Dann ist mindestens eines der Ideale $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_\omega$, $\mathfrak{a}_e$ gleich dem Nullideal; ist $\mathfrak{a}_0 = (0)$, so bilden die Ideale $\mathfrak{m}_i \in M_{\mathfrak{m}}^0$ eine Folge von einem der von uns gesuchten Typen. — Es sei jetzt $\mathfrak{a}_e = (0)$, und es seien $a_1, a_2, \ldots$ die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{J}$. Ferner werde angenommen, es seien die Ideale $\mathfrak{m}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{i_n}$ aus $M_{\mathfrak{m}}^e$ bereits so bestimmt, daß die Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ monoton wachsende Elementezahlen und paarweise verschiedene Charakteristiken besitzen, und daß überdies $a_i \not\equiv 0 \,(\mathfrak{m}_{i_k})$ $(k = 1, \ldots, n)$. Wir bilden nun die Menge $M_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $\overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ aller der $\mathfrak{m}_i \in M_{\mathfrak{m}}^e$, für die die Charakteristik von $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ gleich der Charakteristik der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ wird bzw. für die die Elementezahl von $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ *nicht* die Elementezahlen aller $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ übertrifft. $\mathfrak{a}_{e,n}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}_{e,n}$ bzw. $\mathfrak{b}_{e,n}$ sei der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_i$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $\overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n}$ bzw. $M_{\mathfrak{m}}^e - (M_{\mathfrak{m}}^{e,n} \cup \overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n})$. Dann ist, wie aus Satz 5 und dem Beweise von Satz 6 zu entnehmen, sicher $\mathfrak{a}_{e,n} \neq (0)$, $\bar{\mathfrak{a}}_{e,n} \neq (0)$ und damit $\mathfrak{b}_{e,n} = (0)$ wegen $\mathfrak{a}_{e,n} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_{e,n} \cdot \mathfrak{b}_{e,n} \leq \mathfrak{a}_e = (0)$. Es gibt daher in $M_{\mathfrak{m}}^e - (M_{\mathfrak{m}}^{e,n} \cup \overline{M}_{\mathfrak{m}}^{e,n})$ sicher ein $\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$, das a_{n+1} nicht enthält, und für dieses $\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$ hat nach Konstruktion der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_{k+1}}$ eine andere Primzahlcharakteristik und eine größere Elementezahl als jeder der Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Es lassen sich also schrittweise die $\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ in $M_{\mathfrak{m}}^e$ so bestimmen, daß die Körper $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ paarweise verschiedene Charakteristiken und monoton wachsende

[11] Das „oder" ist hier und im nächsten Satz selbstverständlich nicht ausschließend gemeint.

Elementezahlen besitzen. Ebenso, nur noch etwas einfacher zeigt man, daß für $\mathfrak{a}_\omega = (0)$ die $\mathfrak{m}_{ik}$ aus $M_{\mathfrak{m}}^{\omega}$ so ausgewählt werden können, daß die (durchweg unendlichen) $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{ik}$ paarweise verschiedene Primzahlcharakteristiken haben.

§ 3.

Subdirekte Darstellungen von abzählbaren Integritätsbereichen.

In § 2 wurden im wesentlichen die Fälle erfaßt, in denen eine gegebene Körpermenge $M_{\mathfrak{K}}$ keinen Integritätsbereich als subdirekte Summe besitzt. Diese negativen Betrachtungen sollen jetzt positiv ergänzt werden. Zunächst beweisen wir:

Satz 8. *Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ abzählbar unendlichviele, nichtendliche Körper, die sämtlich untereinander und zu einem festen Körper $\mathfrak{K}$ isomorph sind, so lassen sich alle endlichen Polynomringe $\mathfrak{K}[u_1, \ldots, u_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und außerdem der Polynomring $\mathfrak{K}[u_1, u_2, \ldots]$ in abzählbar unendlichvielen Variabeln als subdirekte Summen der $\mathfrak{K}_i$ darstellen.*

Es genügt, den Beweis für $\mathfrak{K}[u_1, u_2, \ldots] = \mathfrak{P}$ zu führen: zu zeigen ist, daß in $\mathfrak{P}$ abzählbar unendlich viele Primideale $\mathfrak{m}_i$ der Gestalt $\mathfrak{m}_i = (u_1 - \alpha_{i_1}, u_2 - \alpha_{i_2}, \ldots)$ mit $\underset{i}{\Delta}\, \mathfrak{m}_i = (0)$ existieren. Da ferner $p(u_1, u_2, \ldots)$ dann und nur dann zu $\mathfrak{m}_i$ gehört, wenn $p(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots) = 0$, ist die zu beweisende Behauptung gleichwertig mit der andern: Es gibt in $\mathfrak{K}$ abzählbar unendlichviele Wertsysteme $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ derart, daß aus $p(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ stets $p(u_1, u_2, \ldots) = 0$ folgt. Die Richtigkeit dieser zweiten Behauptung ist aber fast trivial. Man erhält nach elementaren algebraischen Sätzen eine Wertsystemmenge $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots)$ der gewünschten Art z. B. dann, wenn man die sämtlichen Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bildet, bei denen fast alle α_k gleich 0 sind, während die von 0 verschiedenen α_k einer festen abzählbaren Untermenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$ angehören. (Man beachte, daß die Menge aller dieser Folgen abzählbar ist, daß jedes Polynom $p(u_1, u_2, \ldots)$ nur endlichviele u_k wirklich enthält, und daß die Werte der nicht in $p(u_1, u_2, \ldots)$ auftretenden α_k für den Wert von $p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ völlig gleichgültig sind.)

Es sei jetzt $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Menge von endlichen oder höchstens abzählbar unendlichen Körpern $\mathfrak{K}_i$, die nur der einen Bedingung genügen soll, daß nicht auf Grund von Satz 6 die Existenz eines als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbaren Integritätsbereichs $\mathfrak{J}$ von vornherein ausgeschlossen ist. Dann gilt zunächst:

Satz 9. *Ist der abzählbare Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als subdirekte Summe der Körper $\mathfrak{K}_i$ darstellbar, so ist es auch der Polynomring $\mathfrak{J}[u_1, \ldots, u_n]$ in endlichvielen und der Polynomring $\mathfrak{J}[u_1, u_2, \ldots]$ in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten u_i.*

Faßt man einen Körper als Grenzfall eines Integritätsbereiches auf, so erscheint Satz 8 offenbar als Grenzfall von Satz 9; denn unter den Voraussetzungen von Satz 8 kann ersichtlich der Körper $\mathfrak{K}$ als subdirekte Summe der Körper $\mathfrak{K}_i$ dargestellt werden. Im übrigen ist Satz 8 vor allem deshalb wesentlich einfacher als Satz 9, weil dort der Körper $\mathfrak{K}$ ein festes volles Repräsentantensystem liefert für jeden der Restklassenkörper $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i$, den wir zur subdirekten Zerlegung des betrachteten Polynomrings $\mathfrak{P}$ benötigen. Ein solches festes volles Repräsentantensystem steht uns diesmal nicht zur Verfügung, und so brauchen wir zum Beweis von Satz 9 die $\mathfrak{J}$ betreffende Abzählbarkeitsvoraussetzung, die bei Satz 8 entbehrt werden konnte[12]). — Es genügt für uns, den Fall eines Polynomrings $\mathfrak{J}[u] = \mathfrak{P}$ in einer einzigen Unbestimmten u zu behandeln. Die Richtigkeit von Satz 9 für $\mathfrak{J}[u_1, \ldots, u_n]$ ergibt sich dann unmittelbar durch Induktion, und was den Fall $\mathfrak{J}[u_1, u_2, \ldots]$ angeht, so sind im Verhältnis zum Falle $\mathfrak{J}[u]$ nur unbedeutende Modifikationen nötig, für die der später ausführlich darzustellende Beweis von Satz 10 als Vorbild dienen kann. — Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{J}$ maximale Primideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ derart, daß $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_i$ jeweils zu $\mathfrak{K}_i$ isomorph und $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$ wird; wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{J}$ wird $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n \neq (0)$, $\mathfrak{m}_{n+1} \cap \mathfrak{m}_{n+2} \cap \ldots = (0)$ für jedes n. Beachtet man weiter, daß die Existenz von Primidealen $\mathfrak{m}_i[u]$ mit zu $\mathfrak{K}_i$ isomorphem Restklassenkörper $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i[u]$ trivial ist, — man braucht nur $\mathfrak{m}_i[u] = (\mathfrak{m}_i, u - \alpha)$ mit beliebigem $\alpha \in \mathfrak{J}$ zu setzen, — und berücksichtigt man Satz 7, so sieht man, daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit Satz 9 nur unter der Voraussetzung bewiesen zu werden braucht, daß entweder die Körper $\mathfrak{K}_i$ alle unendlich sind, oder daß die Elementezahlen der $\mathfrak{K}_i$ mit zunehmendem i monoton ins Unendliche wachsen: dabei genügt es noch, allein die zweite, etwas schwierigere Möglichkeit zu betrachten. Es seien nun $p_1(u), p_2(u), \ldots$ die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{P}$, und es seien bereits die Primideale $\mathfrak{m}_i[u] = (\mathfrak{m}_i, u - \alpha_i)$ $(i = 1, \ldots N(n))$ so konstruiert, daß kein $p_k(u)$ $(k = 1, \ldots, n)$ in sämtlichen $\mathfrak{m}_i[u]$ enthalten ist; nach Voraussetzung gibt es dann ein kleinstes $M(n+1) > N(n)$, derart, daß die Elementezahlen der Körper $\mathfrak{K}_i$ $(i \geqq M(n+1))$ sämtlich größer sind als der Grad g von $p_{n+1}(u)$. Ferner existiert wegen $\mathfrak{m}_{M(n+1)} \cap \mathfrak{m}_{M(n+1)+1} \cap \ldots = (0)$ ein kleinstes $N(n+1) \geqq M(n+1)$, für das nicht alle Koeffizienten von $p_{n+1}(u)$ zu $\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ gehören. Wegen der Existenz von mindestens $g+1$ verschiedenen Elementen in $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ kann man dann in diesem Restklassenkörper ein $\bar{\alpha}_{N(n+1)}$ so bestimmen, daß $\bar{p}_{n+1}(\bar{\alpha}_{N(n+1)}) \neq \bar{0}$ wird, falls wir durch die Querstriche durchweg die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{m}_{N(n+1)}$ kennzeichnen. $\bar{p}_{n+1}(\bar{\alpha}_{N(n+1)}) \neq \bar{0}$ bedeutet aber soviel wie die Nichtzugehörigkeit von

[12]) Über die vermutliche Möglichkeit, sich auch bei Satz 9 von der Abzählbarkeitsvoraussetzung frei zu machen, vgl. den Schluß des Paragraphen.

$p_{n+1}(u)$ zu $\mathfrak{m}_{N(n+1)}[u] = (\mathfrak{m}_{N(n+1)}, u - \alpha_{N(n+1)})$, wenn $\alpha_{N(n+1)}$ ein beliebiger Repräsentant der Klasse $\bar{\alpha}_{N(n+1)}$ ist. Setzen wir noch $\mathfrak{m}_i[u] = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{a}]$ $(i = N(n)+1, \ldots, N(n+1)-1)$, so ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_i$ zu $\mathfrak{K}_i$ isomorph $(i = 1, \ldots, N(n+1))$, und es gehört keines der Elemente $p_i(u)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ zu allen Idealen $\mathfrak{m}_i[u]$. — Damit ist ersichtlich der zum Beweise von Satz 9 nötige Schluß von n auf $n+1$ durchgeführt. Als Gegenstück zu Satz 9, bei dem ein als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbarer Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gegeben sein mußte, beweisen wir jetzt:

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine beliebige abzählbare Folge von endlichen oder abzählbar unendlichen Körpern, die nicht alle die gleiche Charakteristik haben, und auf die Satz 6 nicht anwendbar ist. Dann ist der Integritätsbereich $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten u_k stets subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$.*

Als Grundlage für das fundamentale Existenztheorem 10 dient der

Hilfssatz: Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger höchstens abzählbarer Körper, so gibt es in $\mathfrak{P}^*$ stets unendlichviele Primideale $\mathfrak{m}$, für die $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph wird.

Daß unendlichviele Primideale der gewünschten Art existieren, wenn auch nur ein einziges vorhanden ist, folgt sofort aus der Bemerkung: Es sei $\bar{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{J}_0[u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots]$ der zu $\mathfrak{P}^*$ isomorphe ganzzahlige Polynomring in $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ und es sei $\bar{\mathfrak{P}}^*/\bar{\mathfrak{m}}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph. Dann wird auch $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph, falls wir $\mathfrak{m} = (\bar{\mathfrak{m}}, u_1 - \tilde{p}_1, \ldots, u_N - \tilde{p}_N)$ setzen, wobei die $\tilde{p}_i$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$ bedeuten. Um nun überhaupt ein $\mathfrak{m}$ zu finden, bilden wir zunächst $\mathfrak{J}_0$ je nach der Charakteristik von $\mathfrak{K}$ isomorph oder homomorph auf den Ring $\mathfrak{R}_0$ der ganzzahligen Vielfachen des Einheitselementes von $\mathfrak{K}$ ab, und ordnen dann jedem u_i irgendwie ein $\alpha_i \in \mathfrak{K}$ zu, wobei nur dafür zu sorgen ist, daß jedes nicht zu $\mathfrak{R}_0$ gehörige $\mathfrak{K}$-Element unter den α_i mindestens einmal vorkommt. Es entsteht so ein Homomorphismus H von $\mathfrak{P}^*$ auf $\mathfrak{K}$, zu dem in $\mathfrak{P}^*$ ein $\mathfrak{m}$ mit zu $\mathfrak{K}$ isomorphem $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}$ gehört.

Angesichts des Hilfssatzes genügt es zum Beweise von Satz 10, zu einer Teilfolge $\mathfrak{K}_{i_1}, \mathfrak{K}_{i_2}, \ldots$ von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ die zugehörigen Primideale $\mathfrak{m}_{i_1}, \mathfrak{m}_{i_2}, \ldots$ so zu konstruieren, daß $\bigcap_k \mathfrak{m}_{i_k} = (0)$ wird. Da ferner auf die Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ Satz 6 nicht anwendbar sein soll, ergibt sich aus den beim Beweise von Satz 7 angestellten Überlegungen, daß eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{K}_{l_1}, \mathfrak{K}_{l_2}, \ldots$ existiert, bei der entweder alle $\mathfrak{K}_{l_k}$ die Charakteristik 0 haben oder alle $\mathfrak{K}_{l_k}$ unendlich und paarweise charakteristikungleich sind, oder schließlich die $\mathfrak{K}_{l_k}$ endliche, paarweise charakteristikungleiche Körper darstellen, deren Elementezahlen mit wachsendem k echt monoton wachsen. Wir legen bei den weiteren Betrachtungen die dritte Möglichkeit zugrunde, weil für sie der

Beweis verhältnismäßig am umständlichsten zu führen ist. Es seien $p_1(u)$, $p_2(u)$, ... die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{P}^*$, und es seien die Primideale $\mathfrak{m}_{i_k}$ ($k = 1, \ldots, n$; $i_k = l_{m_k}$, $m_{k+1} > m_k$) bereits so bestimmt, daß $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}_{i_k}$ zu $\mathfrak{K}_{i_k}$ isomorph und $p_k(u) \not\equiv 0 \,(\mathfrak{m}_{i_k})$. Ferner sei N so groß gewählt, daß u_{N+1}, u_{N+2}, ... in $p_{n+1}(u) = p_{n+1}(u_1, \ldots, u_N)$ nicht auftreten, und es sei M der Grad von $p_{n+1}(u)$. Wegen der Art der Auswahl der Körperkette $\mathfrak{K}_{l_1}, \mathfrak{K}_{l_2}, \ldots$ gibt es nun ein kleinstes $m_{n+1} > m_n$ derart, daß die Elementezahl von $\mathfrak{K}_{l_{m_{n+1}}} - \mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ größer ist als M, und daß gleichzeitig nicht alle Koeffizienten von $p_{n+1}(u)$ durch die Charakteristik von $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ teilbar sind. Nach dem Hilfssatz existiert weiter in $\tilde{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{J}_0[u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots]$ ein $\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}$ mit zu $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ isomorphem $\tilde{\mathfrak{P}}^*/\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}$. Wegen der Auswahl von $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$ lassen sich schließlich $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_N$ in $\tilde{\mathfrak{P}}^*$ so bestimmen, daß $p_{n+1}(\tilde{p}_1, \ldots \tilde{p}_N) \not\equiv 0 \,(\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}})$. Setzt man dann $\mathfrak{m}_{i_{n+1}} = (\tilde{\mathfrak{m}}_{i_{n+1}}, u_1 - \tilde{p}_1, \ldots, u_N - \tilde{p}_N)$, so wird $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{m}_{i_{n+1}}$ isomorph zu $\mathfrak{K}_{i_{n+1}}$, und es liegt $p_{n+1}(u)$ nicht in $\mathfrak{m}_{i_{n+1}}$. Mit dieser Feststellung sind wir, ebenso wie beim Beweise von Satz 9 im wesentlichen fertig. — Was den in Satz 10 nicht erfaßten Fall einer Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ von lauter charakteristikgleichen Körpern angeht, so erhält man offenbar:

Satz 10a. *Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine beliebige abzählbare Folge von abzählbaren Körpern der Charakteristik 0, so kann sowohl der Ring $\mathfrak{J}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller ganzzahligen als auch der Ring $\mathfrak{K}_0[u_1, u_2, \ldots]$ aller rationalzahligen Polynome in abzählbar unendlichvielen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ dargestellt werden.*

Satz 10b. *Ist $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ eine abzählbare Folge von abzählbaren Körpern der Charakteristik p, auf die Satz 6a nicht anwendbar ist, so ist stets der Polynomring $\mathfrak{K}_p[u_1, u_2, \ldots]$ über dem Primkörper $\mathfrak{K}_p$ als subdirekte Summe der $\mathfrak{K}_i$ darstellbar.*

Die Beweise der Sätze 10a und 10b dürfen unterdrückt werden, da sie im wesentlichen nach den gleichen Richtlinien verlaufen wie der Beweis von Satz 10 selbst. — Mit den Sätzen 10, 10a, 10b ist die Frage nach denjenigen abgezählten Mengen abzählbarer Körper, die zur subdirekten Darstellung von Integritätsbereichen brauchbar sind, vollständig beantwortet. Die in den Sätzen 6 und 6a angegebenen Ausnahmefälle sind die einzigen, in denen unter den subdirekten Summen kein Integritätsbereich vorkommt. Natürlich wird man weiterfragen, ob die Beschränkung aufs Abzählbare für das gewonnene Resultat wirklich wesentlich war. Wie eine Überschlagsbetrachtung zeigt, dürfte es nicht schwierig sein, die bei den Beweisen benutzten Konstruktionen mit transfiniter Induktion auf den Fall auszudehnen, daß die Mächtigkeit der Menge vorgegebener Körper nicht kleiner ist als die Mächtigkeit der Menge aller Elemente irgend eines dieser Körper. Soll dagegen etwa eine abgezählte Folge $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ von nicht durchweg endlichen oder abzählbaren Körpern $\mathfrak{K}_i$ behandelt werden, so

liegt offenbar ein neuartiges Problem vor, bei dem eine schematische Übertragung der oben mit Erfolg angewandten Überlegungen nicht mehr möglich ist. Indessen erscheint es zweifelhaft, ob ein Vorwärtsdringen in der angedeuteten Richtung lohnend sein würde. Denn der Hauptwert der Untersuchungen von § 3 dürfte noch mehr als im Positiven im Negativen liegen. Am wichtigsten ist es wohl, daß hier an drastischen Beispielen gezeigt wurde, daß einerseits Integritätsbereiche der verschiedensten arithmetischen Typen subdirekte Summen ein und derselben Körpermenge sein können, und daß es andererseits in Gestalt von $\mathfrak{P}^*$ einen Integritätsbereich gibt, der als subdirekte Summe beinahe aller möglichen abzählbaren Mengen von abzählbaren Körpern darstellbar ist. Damit ist aufs deutlichste nachgewiesen, daß subdirekte Zerlegungen einen ganz anderen Charakter haben als direkte, und es dürfte wohl nicht nötig sein, dieses Ergebnis durch Betrachtung überabzählbarer Beispiele weiter zu bekräftigen.

§ 4.

Subdirekte Komponenten von Idealen.

Die negativen Resultate von § 3 sollen mit Rücksicht auf eine spätere Gegenüberstellung in einer etwas anderen Richtung noch kurz ergänzt werden. Es sei sei zunächst der (kommutative oder nicht kommutative) Ring $\mathfrak{S}$ subdirekte Summe der beliebigen Ringmenge $M_{\mathfrak{R}}$, und es sei $\mathfrak{a}$ irgend ein zweiseitiges $\mathfrak{S}$-Ideal. Dann bildet die Menge aller der $a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$, zu denen ein $f(x) \in \mathfrak{a}$ mit $f(\alpha) = a_\alpha$ existiert, ein zweiseitiges $\mathfrak{R}_\alpha$-Ideal, das mit $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ bezeichnet und die „α-Komponente von $\mathfrak{a}$" genannt werden soll. Bedeutet ferner $\mathfrak{m}_\alpha$ wie in § 1 das dem Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}$ zugeordnete zweiseitige Ideal (also in der neuen Bezeichnung das größte zweiseitige $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{a}$, das der Bedingung $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = (0_\alpha)$ genügt), so ergibt sich mühelos:

Satz 11. *Zwei zweiseitige $\mathfrak{S}$-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ haben dann und nur dann die gleiche α-Komponente, $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{b})$, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}_\alpha$; es ist $\mathfrak{R}_\alpha/\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ isomorph zu $\mathfrak{S}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_\alpha)$.*

Soll nun auf Grund von Satz 11 untersucht werden, wie weit sich die arithmetischen Eigenschaften von $\mathfrak{a}$ in seinen Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ spiegeln, so wird man zunächst fragen, ob etwa die Primideale $\mathfrak{p}$ durch prime α-Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ charakterisiert sind. Die Antwort ist völlig negativ. Beschränken wir uns dem Charakter der Note entsprechend auf subdirekte Darstellungen eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ durch Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_\alpha$, so erhalten wir:

Satz 12. *Bei passender Wahl der subdirekten Summe $\mathfrak{J}$ und der Komponenten $\mathfrak{J}_\alpha$ kann es vorkommen:* a) *Daß alle Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ eines Nichtprimideals $\mathfrak{a}$ Primideale werden oder mit $\mathfrak{J}_\alpha$ zusammenfallen.* b) *Daß die Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ eines Primideals $\mathfrak{p}$ alle primär*

werden oder sämtlich mindestens zwei verschiedene minimale Primoberideale besitzen.

Es sei nämlich $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}[x, y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über irgendeinem unendlichen Körper $\mathfrak{K}$, und es werde für $\alpha = 1, 2, \ldots$ gesetzt:

$a_1)$ $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(y + a_\alpha)$, $\mathfrak{a} = (xy)$. $a_2)$ $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(xy + a_\alpha)$, $\mathfrak{a} = (xy)$.

$b_1)$ $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(x + a_\alpha y^2)$, $\mathfrak{p} = (x)$. $b_2)$ $\mathfrak{J}_\alpha = \mathfrak{J}/(x + a_\alpha \cdot y \cdot (y + b))$, $\mathfrak{p} = (x)$.

Dabei sollen durchweg $a_\alpha \neq 0$; $a_\alpha \neq a_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ sowie $b \neq 0$ sein. Dann ist zunächst sofort zu sehen, daß in allen 4 Fällen die $\mathfrak{J}_\alpha$ Integritätsbereiche sind, und daß $\mathfrak{J}$ nach Satz 2 als subdirekte Summe der $\mathfrak{J}_\alpha$ darstellbar ist. Ferner wird bei $a_1)$ $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{a} = (y + a_\alpha, xy) = (y + a_\alpha, x)$ ein Primoberideal von $\mathfrak{m}_\alpha = (y + a_\alpha)$ und folglich $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ ein Primideal für jedes α. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{a} = (xy + a_\alpha, xy) = \mathfrak{J}$, $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{J}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ im Falle $a_2)$. Bei $b_1)$ haben wir: $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{p} = (x + a_\alpha y^2, x) = (x, y^2)$, und es ist nicht nur (x, y^2) in $\mathfrak{J}$ sondern auch $(x, y^2)/(x + a_\alpha y^2)$ in $\mathfrak{J}/(x + a_\alpha y^2)$ echt primär, so daß $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ für jedes α ein echtes Primärideal wird. Entsprechend folgt bei $b_2)$ aus $\mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{p} = (x + a_\alpha \cdot (y + b) \cdot y, x) = (x, y \cdot (y + b)) = (x, y) \cdot (x, y + b)$, daß $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{p})$ für jedes α das Produkt zweier verschiedener Primideale darstellt.

Spezialisieren wir uns nun wie in § 2 und § 3 auf die Betrachtung der subdirekten Summendarstellungen von Integritätsbereichen $\mathfrak{J}$ durch *Körper* $\mathfrak{K}_\alpha$, so gibt es für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{J}$ und jedes α nur die beiden Möglichkeiten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = (0_\alpha)$ und $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{K}_\alpha$. Beispiele zu Satz 12b können hier also nicht mehr gebildet werden. Andererseits ist es auch in diesem einfachsten Sonderfall keine Kunst, entsprechend Satz 12a, Fälle zu finden, in denen ein Nichtprimärideal $\mathfrak{a}$ der Bedingung $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{K}_\alpha$ für alle α genügt, (man braucht ja nur $\mathfrak{a}_\alpha$ zu allen $\mathfrak{m}_\alpha$ teilerfremd zu wählen), und als Ersatz für Satz 12b kann die folgende Bemerkung dienen:

Es gibt Fälle, in denen für ein maximales $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}$ unendlichviele Komponenten $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{m})$ gleich (0_α) werden. (Trivial; man braucht nur von einer Menge $M_\mathfrak{m}$ maximaler $\mathfrak{J}$-Primideale mit dem Gesamtdurchschnitt (0) auszugehen, in der unendlich oft das Primideal $\mathfrak{m}$ auftritt[13]), und die zugehörige subdirekte Zerlegung von $\mathfrak{J}$ zu bilden.) — Die Folgerungen, die aus Satz 12 und den Ergänzungsbemerkungen gezogen werden müssen, sind eindeutig:

---

[13]) Natürlich ist eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{J}$, bei der mehrere Komponentenringe $\mathfrak{R}_{\alpha_1}, \mathfrak{R}_{\alpha_2}, \ldots$ ein-und-demselben maximalen $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{m}_{\alpha_1} = \mathfrak{m}_{\alpha_2} = \cdots$ zugeordnet sind, nichtreduziert in dem Sinne, daß z. B. $\mathfrak{R}_{\alpha_2}, \mathfrak{R}_{\alpha_3}, \ldots$ unter Beibehaltung von $\mathfrak{R}_{\alpha_1}$ weggelassen werden können, ohne daß die übrigbleibende Ringmenge die Eigenschaft verliert, eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{J}$ zu definieren. Man beachte aber, daß bei jeder subdirekten Darstellung eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ durch beliebige Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$, bei der nur $\mathfrak{m}_\alpha \neq (0)$

Die Betrachtung der Komponentenideale $\mathfrak{i}_\alpha(\mathfrak{a})$ *eines* $\mathfrak{S}$*-Ideals* $\mathfrak{a}$ *hinsichtlich einer gegebenen subdirekten Summendarstellung von* $\mathfrak{S}$ *ist im allgemeinen zur Festlegung der arithmetischen Eigenschaften von* $\mathfrak{a}$ *völlig ungeeignet.*

§ 5.

Spezielle subdirekte Summen[14]).

Für die endgültige kritische Auseinandersetzung mit dem Begriff der subdirekten Summe ist es wichtig, den negativen Ergebnissen von § 4 die positiven Resultate gegenüberzustellen, die man bei denjenigen Ringen erhält, die im Rahmen der allgemeinen Theorie der subdirekten Zerlegung als „spezielle" subdirekte Summen bezeichnet werden. — Benutzt man die in § 1 eingeführte Terminologie, so kann man kurz so definieren: Der Ring $\mathfrak{S}^+ \leq \mathfrak{S}^*$ heißt dann und nur dann *spezielle subdirekte Summe* der Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn $\mathfrak{S}^+$ alle Funktionen $f(x)$ enthält, die fast überall auf $M_\mathfrak{R}$ verschwinden, (also für fast alle α der Gleichung $f(\alpha) = 0_\alpha$ genügen). — Oder auch, scheinbar weniger fordernd, aber tatsächlich gleichwertig: $\mathfrak{S}^+ \leq \mathfrak{S}^*$ heißt dann und nur dann spezielle subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$, wenn für jedes $\alpha \in M$ und jedes $a_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$ die durch die Gleichungen $f(\beta) = 0_\beta$, $(\beta \neq \alpha)$; $f(\alpha) = a_\alpha$ definierte Funktion $f(x)$ zu $\mathfrak{S}^+$ gehört[15]). —

Bei einer endlichen Ringmenge $M_\mathfrak{R}$ gibt es offenbar außer der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ keine weiteren speziellen subdirekten Summen

für jedes α, irgendwelche endlich vielen Komponentenringe $\mathfrak{R}_{\alpha_1}, \mathfrak{R}_{\alpha_2}, \ldots \mathfrak{R}_{\alpha_n}$ stets im gleichen Sinne weggelassen werden dürfen. (Denn es muß ja wegen $\mathfrak{m}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{m}_{\alpha_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_{\alpha_n} \neq (0)$ der Durchschnitt aller von den $\mathfrak{m}_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots n)$ verschiedenen $\mathfrak{m}_\alpha$ sicher gleich (0) werden.) In Sonderfällen kann es sogar vorkommen, daß jede unendliche Teilmenge der Menge $M_\mathfrak{R}$ aller $\mathfrak{R}_\alpha$ eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{J}$ definiert; man betrachte z. B. eine subdirekte Darstellung des Ringes aller ganzen Zahlen durch Körper $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{K}_\alpha$, bei der keine zwei verschiedenen $\mathfrak{K}_\alpha$ derselben Primzahl zugeordnet sind.

[14]) Die wichtigsten Sätze über spezielle subdirekte Summen stammen von Köthe. Vgl. vor allem: G. Köthe, Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, Math. Ann. 103 (1930), S. 545–572. — Die Ausführungen von § 5 sollen nicht die Theorie wesentlich weiterentwickeln, sondern nur einige für unsere kritischen Betrachtungen besonders wichtige Punkte kurz hervorheben.

[15]) Unter allen speziellen subdirekten Summen $\mathfrak{S}^+$ einer gegebenen Ringmenge $M_\mathfrak{R}$ gibt es offenbar eine minimale $\mathfrak{S}^+_{\min}$, und zwar besteht $\mathfrak{S}^+_{\min}$ aus allen und nur den Funktionen $f(x)$, die fast überall auf $M_\mathfrak{R}$ verschwinden. Zum Teil werden in der Literatur die speziellen minimalen subdirekten Summen $\mathfrak{S}^+_{\min}$ (und nicht die von uns in § 1 im Anschluß an Mc Coy eingeführten Ringe $\mathfrak{S}^*$) als „direkte Summen" schlechthin bezeichnet. Diese vom Texte abweichende Terminologie steht in Übereinstimmung mit der von Bourbaki bei Moduln gegebenen Definition der direkten Summe — vgl. [4]).

$\mathfrak{S}^+$ (wohl aber unter Umständen nichtspezielle von $\mathfrak{S}^*$ verschiedene subdirekte Summen $\mathfrak{S}$). Ganz allgemein folgt unmittelbar aus der Grunddefinition: Bei jeder speziellen subdirekten Summe $\mathfrak{S}^+$ bildet die Menge aller $f(x)$ mit $f(\beta) = (0_\beta)$, $(\beta \neq \alpha)$ einen zu $\mathfrak{R}_\alpha$ isomorphen Unterring $\mathfrak{R}'_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$ und gleichzeitig ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{S}^+$. Enthält wie weiterhin angenommen werden soll jeder Komponentenring $\mathfrak{R}_\alpha$ ein Einheitselement, so wird bei jedem zweiseitigen $\mathfrak{S}^+$-Ideal $\mathfrak{a}$ das Durchschnittsideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}'_\alpha$ durch den zwischen $\mathfrak{R}'_\alpha$ und $\mathfrak{R}_\alpha$ bestehenden Isomorphismus auf die α-Komponente $i_\alpha(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ abgebildet, so daß man ebensogut mit dem Unterideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{S}^+$ wie mit der abstrakten α-Komponente $i_\alpha(\mathfrak{a})$ arbeiten kann. *Jedem zweiseitigen $\mathfrak{R}_\alpha$-Primideal $\mathfrak{p}_\alpha \neq \mathfrak{R}_\alpha$ bzw. seinem isomorphen Bild $\mathfrak{p}'_\alpha$ in $\mathfrak{R}'_\alpha$ entspricht umkehrbar eindeutig ein $\mathfrak{S}^+$-Primideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ mit $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_\alpha} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{p}'_\alpha$, und zwar besteht $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ aus allen und nur den $f(x) \in \mathfrak{S}^+$, bei denen $f(\alpha) \in \mathfrak{p}'_\alpha$. Gibt es außer den $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ in $\mathfrak{S}^+$ noch weitere zweiseitige Primideale, so müssen diese sämtlich der Gleichung $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ für jedes α genügen.*

Die Beweise sind ganz einfach. Man hat nur zu beachten, daß jeder Ring $\mathfrak{R}'_\alpha$ wegen der Existenz des Einheitselementes der Gleichung $\mathfrak{R}'^2_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ genügt, während $\mathfrak{R}'_\alpha \cdot \mathfrak{R}'_\beta = (0)$ $(\alpha \neq \beta)$ wird, und darüber hinaus sogar $\mathfrak{R}'_\alpha \cdot \overline{\mathfrak{R}}'_\alpha = (0)$ gilt, falls $\overline{\mathfrak{R}}'_\alpha$ den Ring aller $f(x) \in \mathfrak{S}^+$ mit $f(\alpha) = 0_\alpha$ bedeutet. — Spezialisiert man weiter — entsprechend der Beschränkung auf Körperkomponenten in § 2 und § 3 — die $\mathfrak{R}_\alpha$ zu *einfachen* Ringen, d. h. zu Ringen (mit Einheitselement) ohne von (0_α) verschiedenes echtes zweiseitiges Ideal, so erhält man über die bisherigen Ergebnisse hinaus mühelos die Sätze:

In der speziellen subdirekten Summe $\mathfrak{S}^+$ der einfachen Ringe $\mathfrak{R}_\alpha$ gibt es minimale zweiseitige Ideale (also solche ohne echtes zweiseitiges Unterideal $\neq (0)$), und zwar sind die Ringe $\mathfrak{R}'_\alpha$ die einzigen derartigen Ideale. Jedes zweiseitige $\mathfrak{S}^+$-Ideal enthält mindestens ein minimales. Die einfachen Komponentenringe $\mathfrak{R}_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$ sind durch den Gesamtring $\mathfrak{S}^+$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt[16]).

Zu jedem α gibt es genau ein zweiseitiges $\mathfrak{S}^+$-Primideal $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ mit $\mathfrak{p}_{0_\alpha} \cap \mathfrak{R}'_\alpha \neq \mathfrak{R}'_\alpha$, nämlich das Ideal aller der $f(x) \in \mathfrak{S}^+$ mit $f(\alpha) = 0_\alpha$. Die $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ sind maximale zweiseitige Nullteilerideale in $\mathfrak{S}^+$, und zwar die einzigen. D. h.: zu jedem $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ gibt es ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ in $\mathfrak{S}^+$ mit $\mathfrak{p}_{0_\alpha} \cdot \mathfrak{a} = (0)$, während kein echtes zweiseitiges Oberideal von $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ die gleiche Eigenschaft besitzt; ferner ist jedes zweiseitige $\mathfrak{q}$, zu dem ein $\mathfrak{a} \neq (0)$ mit $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a} = (0)$ existiert, in mindestens einem $\mathfrak{p}_{0_\alpha}$ enthalten.

Vergleicht man die für eine spezielle subdirekte Summe mit allgemeinen bzw. einfachen Komponenten $\mathfrak{R}_\alpha$ geltenden Primidealsätze mit den Ergebnissen von § 4, stellt man ferner den für die einfachen

[16]) Die Unterringe $\mathfrak{R}'_\alpha$ von $\mathfrak{S}^+$, die den $\mathfrak{R}_\alpha$ in $\mathfrak{S}^+$ entsprechen, sind sogar absolut eindeutig festgelegt.

Komponenten einer subdirekten Summe gültigen Eindeutigkeitssatz den negativen Resultaten von § 3 gegenüber — (wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die in § 3 allein als Komponenten zugelassenen Körper einfache Ringe primitivster Art sind) — so sieht man klar: Die speziellen subdirekten Summen stehen den direkten Summen sehr nahe, wenn auch wesentliche Unterschiede nicht vernachlässigt werden dürfen, die sich z. B. bei unsern Betrachtungen in der Möglichkeit des Auftretens von Primidealen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{S}^+$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}'_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$ für alle α zeigen. — Bei den allgemeinen subdirekten Summen dagegen gehen die Analogien zu den direkten Summen völlig verloren.

§ 6.

Schlußfolgerungen.

Die negativen Ergebnisse von § 3 und § 4 müssen sorgfältig berücksichtigt werden, wenn man die notwendigen und hinreichenden Darstellungskriterien, die in der systematischen Theorie der subdirekten Zerlegung in gewissem Sinne im Mittelpunkt stehen, richtig würdigen will. Als Beispiel möge etwa der fundamentale Satz betrachtet werden:

Ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann als subdirekte Summe dichter Ringe darstellbar, wenn sein Radikal* (im Sinne der allgemeinen neuerdings von Jacobsen aufgestellten Definition) *gleich dem Nullideal wird* [17]).

Hier ist einerseits zu beachten, daß der Begriff „dichter Ring" eine glückliche Verallgemeinerung des Begriffs „voller Matrizenring endlichen Grades über einem Schiefkörper" darstellt, andererseits ist zu berücksichtigen, daß das Radikal Jacobsens nach Chevalley eine sehr anschauliche Deutung gestattet [18]): Es ist das zweiseitige Ideal aller der Elemente a des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}$, die bei jedem einfachen $\mathfrak{R}$-Rechtsmodul $\mathfrak{M}$ der Bedingung $\mathfrak{M} \cdot a = 0$ genügen. — Das betrachtete Fundamentaltheorem besagt also unter Berücksichtigung von Satz 2:

In jedem Ring $\mathfrak{R}$ *ist der Durchschnitt aller der Ideale* $\mathfrak{m}$, *für die* $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ *ein dichter Ring wird, gleich dem Radikal im Sinne Jacobsens.*

D. h. das Fundamentaltheorem vermittelt eine wesentliche Erkenntnis, weil es zwei unabhängig voneinander in einfacher und plausibler

[17]) Vgl. Mc Coy, Theorem 8, sowie die Originalarbeiten von Jacobson: Structure theorie of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), S. 228—245. (Definition des dichten Ringes, auf die im Text nicht näher eingegangen werden kann.) — The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. **67** (1945), S. 300—320. (Formulierung und Beweis des Haupttheorems.)

[18]) Vgl. O. Goldmann, A characterization of semi-simple rings with descending chain condition, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), S. 1021—1027.

Weise definierte Begriffe in Beziehung setzt [19]). Auf der anderen Seite muß man sich hüten, aus der formalen Analogie mit dem Artin-Wedderburnschen Satz, nach dem jedes hyperkomplexe System, bei dem das Radikal im üblichen Sinne des Wortes verschwindet, halbeinfach sein muß, falsche Folgerungen zu ziehen. Aus dem Satz von Artin-Wedderburn ergibt sich sofort, daß man alle hyperkomplexen Systeme mit verschwindendem Radikal beherrscht, sofern man nur die Struktur der einfachen Systeme völlig übersieht. Um einzusehen, daß aus unserem Fundamentaltheorem in keiner Weise eine ähnliche Aussage abgeleitet werden kann, braucht man nur zu beachten, daß für kommutative Ringe mit Einheitselement das Fundamentaltheorem mit Satz 3 zusammenfällt, und dann sich der Ergebnisse von § 3 und § 4 zu erinnern. — Hier muß nun entschieden die Frage aufgeworfen werden, ob nicht die Bezeichnung „subdirekte Summe" als unglücklich gewählt anzusehen ist, weil sie den nicht voll mit dem Stoffe Vertrauten allzuleicht zu falschen Analogien verführt. Verstärkt werden diese Bedenken durch die Ergebnisse von § 5, wo sich zeigte, daß die „speziellen" subdirekten Summen — ganz im Gegensatz zu den allgemeinen — sehr eng mit den direkten Summen zusammengehören, so daß das Wort „subdirekt" auch mit einem Zusatz für sie im Grunde nicht richtig paßt. Es wäre daher — bei aller Anerkennung der Bedenken gegen eine Änderung einer einmal angenommenen Terminologie — zu erwägen, ob es nicht zweckmäßig ist, die Bezeichnung „subdirekte Summe" überhaupt aufzugeben [20]). Nur müßte man dann folgerichtig sein und — soweit nicht ausschließlich von endlichen oder unendlichen direkten Summen $\mathfrak{S}^*$ im Sinne von § 1 die Rede ist — das Wort „Summe" völlig vermeiden. Das wäre nicht schwierig, da die Art wie die subdirekten Summen in § 1 eingeführt wurden, ohnehin den Gedanken nahelegt, von *Funktionenringen auf einer gegebenen Ringmenge* $M_{\mathfrak{R}}$ zu sprechen. Man käme so zwanglos etwa zu der folgenden Terminologie:

Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$	— beliebiger Unterring der direkten Summe $\mathfrak{S}^*$ aller $\mathfrak{R}_\alpha \in M_{\mathfrak{R}}$
vollwertiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$	— subdirekte Summe der $\mathfrak{R}_\alpha$

[19]) Im übrigen wirft die Einführung des Jacobsonschen Radikalbegriffs auch auf die Theorie der kommutativen Integritätsbereiche in mancher Hinsicht neues Licht. Zu denken ist da vor allem an das Problem, welche Ideale in einem gegebenen Integritätsbereich als Durchschnitte von (i. a. unendlich vielen) maximalen Primidealen dargestellt werden können. (Verallgemeinerung des „Hilbertschen Nullstellensatzes".)

[20]) Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß man zum mindesten bei den speziellen subdirekten Summen zur Zeit noch keineswegs von einer allgemein angenommenen, einheitlichen Terminologie reden kann, vgl. [4]) und [15]).

fast vollständiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$ — spezielle subdirekte Summe $\mathfrak{S}^+$ der $\mathfrak{R}_\alpha$

vollständiger Funktionenring auf $M_{\mathfrak{R}}$ — direkte Summe $\mathfrak{S}^*$ der $\mathfrak{R}_\alpha$.

Dabei würden die Worte „vollwertig“ bzw. „fast vollständig“ darauf hinweisen, daß bei einer subdirekten Summe an jeder einzelnen Stelle α der durch den Ring $\mathfrak{R}_\alpha$ gelieferte Wertevorrat voll zur Verwendung kommt bzw. darauf, daß eine spezielle subdirekte Summe alle fast überall verschwindenden Funktionen enthält. Natürlich könnten diese Zusätze eventuell durch andere, möglicherweise die Sache noch besser treffende ersetzt werden. Aber der Grundgedanke, von der Summen- zur Funktionenring-Terminologie überzugehen, sei hier nachdrücklich zur Diskussion gestellt, nicht aus Pedanterie, sondern weil auf diese Weise das Wesen der benutzten Begriffe klarer als bisher zum Ausdruck gebracht und sonst naheliegende Mißverständnisse vermieden werden könnten.

(Eingegangen am 30. Dezember 1949.)

Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione.

Herrn Oskar Perron zum 70. Geburtstag gewidmet.

Memoria di **Francesco Severi** in Roma.

Introduzione.

Il concetto di molteplicità d'intersezione, sul quale son tornato varie volte dal 1933, onde precisarne il valore costruttivo e critico e conferirgli la maggiore estensione, è fondamentale nella geometria algebrica[1]).

Esso costituisce uno degli scopi principali d'una recente opera di A. Weil[2]).

Il problema più importante, da cui posson farsi derivare le soluzioni di tutti gli altri congeneri, è quello dell'intersezione di due varietà algebriche (irriducibili) W_h, V_k tracciate sopra una varietà algebrica irriducibile M_r, essendo $h + k \geqq r$.

I miei scopi sono ora:

a) Di collegare la definizione di Weil alla mia e di mostrare come quella discenda da questa.

b) Di stabilire il carattere intrinseco e invariante per trasformazioni pseudoconformi (e quindi per trasformazioni birazionali senza eccezioni) della mia definizione; mentre quella di Weil ha carattere proiettivo e non intrinseco.

Alla definizione di Weil si può però dare facilmente un contenuto invariante, benché non intrinseco (n. 9). Comunque, ponendo in rilievo

---

[1]) Ved. le citazioni più aggiornate in proposito nell'ultima mia Memoria sull'argomento: Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione (Annali di Matematica, vol. 26, pagg. 221—270; 1947). Vedi pure le mie lezioni (litografate) tenute a Roma nel 1947—48 e 1948—49: Introduzione alla geometria algebrica: geometria numerativa (Roma, Edizioni Universitarie Docet, 1948—49). L'ultima parte di queste lezioni, da tenersi nel 1949—50, sarà ulteriormente pubblicata.

[2]) Foundation of algebraic geometry (American Math. Society. Colloquium publications, New York, 1946). L'Autore stesso dichiara che "the main purpose of the book is to present a detailed and connected treatment of the properties of intersection-multiplicities, which is to include all that is necessary and sufficient to legitimize the use made of these multiplicities in classical algebraic geometry, especially of the Italian school." Vedi pure la recensione chiara e sintetica che del libro di Weil ha fatto van der Waerden (Nieuw Archiv voor Wiskunde, 1949).

queste caratteristiche di tale definizione, non si vuole sminuirne l'importanza e l'eleganza.

La definizione dell'A. è *dinamica*; quella di Weil ha il pregio di essere in gran parte *statica*[3]). Inoltre essa offre il vantaggio di ricondurre la molteplicità d'intersezione di due varietà qualunque al più semplice concetto di molteplicità d'intersezione d'una varietà con uno spazio lineare.

c) Di esporre un cenno di estensione della teoria alle varietà analitiche, per le quali le conclusioni sostanziali del campo algebrico permangono immutate[4]).

d) D'indicare una nuova semplicissima dimostrazione del teorema di Bézout inerente ad r equazioni algebriche in r variabili, col preciso complemento inerente alla molteplicità d'intersezione delle soluzioni isolate.

Questa dimostrazione è essenzialmente geometrica e non ricorre nè a concetti nè ad operazioni di eliminazione[5]).

e) D'indicare una nuova via molto rapida e geometrica onde pervenire al risultante di $r+1$ forme di $r+1$ variabili e all'u-risultante di r forme, senza alcun appoggio alle classiche teorie dell'eliminazione[6]).

In relazione all'u-risultante dimostro l'esistenza anche di risultanti limiti, cui è necessario ricorrere quando vi sono infiniti punti comuni ad r forme di S_r, epperò l'u-risultante formale svanisce identicamente;

---

[3]) Ma può divenire del tutto dinamica attraverso il concetto di specializzazione (van der Waerden, Weil).

[4]) Il dott. P. Samuel, che ho incontrato nel Convegno matematico di Liegi (dicembre 1949), dopo che il presente lavoro era preparato, mi ha informato dell'esistenza di un lavoro di Chevalley (Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. Math. Soc. t. 57, 1945, pp. 1—85) che non ho ora nè il modo nè il tempo di consultare. Probabilmente le osservazioni del n. 10 della presente Memoria verranno assorbite dalla ricerca di Chevalley; ma i punti di vista sono di certo diversi. D'altronde le mie considerazioni sono estremamente semplici.

[5]) Va osservato pure che il cosidetto „teorema di Bézout per due varietà di dimensioni complementari V_k, W_{r-k} di S_r", fu da me dimostrato nel 1933 indipendentemente dall'eliminazione (col solo ausilio del principio di corrispondenza di Chasles completato con la regola di Zeuthen). Da questo teorema deducesi, quale corollario, quello che concerne l'intersezione di più varietà di dimensioni $k_1, k_2, \ldots k_t$ di S_r, con $\sum k_i \geq (t-1)r$ (qualora esse si taglino in una varietà di dimensione normale). Per $t = r$, $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = r-1$ ne deriva il teorema di Bézout per r forme di S_r, che si taglino in un numero finito di punti. Tale teorema risulta così anche per questa via svincolato dall'eliminazione. Ma la dimostrazione esposta nella presente Memoria è molto più semplice ed elementare.

[6]) Pertanto anche per la via qui indicata viene cancellata dalla geometria algebrica ogni traccia di sviluppi inerenti alle teorie dell'eliminazione, anche se, sotto certi riflessi, convenga conservare una parte del linguaggio. Questo è uno scopo altrimenti realizzato da Chevalley e da Weil (ved. l'opera citata di A. Weil, pag. 31).

ciò che avevo altrove fatto (1947) pel risultante di Kronecker (dimostrando che con ciò si eliminano le circostanze paradossali a cui talvolta dà luogo l'applicazione di questo risultante). Dai risultanti limiti deducesi poi quello che chiamo *risultante ridotto*, che serve a determinare (con le loro molteplicità) le eventuali intersezioni *isolate* e *pseudisolate:* queste ultime provenienti da soluzioni comuni a tutti i risultanti limiti, al pari delle intersezioni isolate.

In ultimo la considerazione dell'u-risultante e del risultante ridotto dà luogo a risultanti ridotti di varie dimensioni, che definiscono la molteplicità d'intersezione delle componenti delle varie dimensioni di una varietà algebrica anche impura, definita per interferenza[7]) da un sistema qualunque di equazioni algebriche; e ciò d'accordo col concetto di tali molteplicità introdotto nella mia Memoria citata del 1947.

La definizione dell'Autore.

1. Richiamo in primo luogo la definizione del 1933[8]). Cominciamo dal caso in cui $h+k=r$ e le V_k, W_{r-k} hanno un'intersezione isolata nel punto *semplice* P di M_r. Si dice che P è *intersezione semplice* delle V, W o che in P le V, W hanno *molteplicità d'intersezione* 1, s'esse passano per P semplicemente senza tangenti comuni.

Suppongasi ora che P sia un'interferenza qualunque isolata delle V, W e che una delle due varietà, sia p. es. V_k, possa variare entro M_r in un sistema algebrico irriducibile Σ, in guisa che la generica $\overline{V}_k$ dell'intorno di V_k in Σ non passi per P e incontri W_{r-k} soltanto in intersezioni semplici. Il numero $i(\geqq 1)$ di queste intersezioni resta invariato finché son soddisfatte le ipotesi (intersezioni tutte semplici distinte da P). Esso definiscesi quale *molteplicità d'intersezione* delle V_k, W_{r-k} in P. Per $\overline{V}_k \to V_k$ gli i punti tendono a riunirsi in P: donde la ragione della denominazione, che dunque rispecchia bene il fatto geometrico.

Il numero i resta il medesimo se, essendo variabile W, si mutano le veci delle due varietà e se, essendo variabili entrambe, si fa subire a ciascuna delle due un piccolo spostamento generico nel rispettivo intorno entro il sistema irriducibile in cui essa è variabile sopra M_r. In quest'ultimo caso le due varietà spostate hanno nell'intorno di P esattamente i intersezioni semplici.

Perché la definizione abbia valore generale, occorre considerare inoltre il caso in cui ciascuna delle due varietà non può variare entro

[7]) Nella Memoria del 1947 ho stimato opportuno di riserbare il nome d'interferenza all'insieme dei punti comuni a due varietà, quando i punti stessi si considerino a prescindere dalla molteplicità d'intersezione.

[8]) Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie (Abhandl. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität, S. 335—364; 1933).

M_r (caso concretamente possibile). Si dimostra allora che si può scegliere (in infiniti modi) sopra M_r una varietà pura V_k' *non passante per* P (questo è l'essenziale, di cui anche VAN DER WAERDEN profitta nella sua teoria) tale che la $H = V + V'$ appartenga sopra M_r ad un sistema irriducibile Σ, la cui generica $\overline{H}$, dell'intorno di H, incontri W soltanto in un certo numero i d'intersezioni semplici. Il numero i è indipendente, sotto le ipotesi espresse, dalla scelta delle V', $\overline{H}$ e, se V è variabile in un sistema irriducibile, i uguaglia il numero che si ottiene, in questo caso, come sopra si è detto. Mutando le veci delle V, W l'intero i non cangia. Esso è invariante per trasformazioni analitiche biregolari. Condizione necessaria e sufficiente perché le V, W si incontrino semplicemente in P, è che $i = 1$.

Quando $h + k > r$ e S_d è lo spazio ambiente di M_r, la molteplicità d'intersezione delle V, W si definisce in relazione al punto generico P di una componente irriducibile C, di dimensione normale $l = h + k - r$, dell'interferenza delle V, W[9]; e ci si riduce al caso precedente segando tutto con un S_{d-l} generico passante per P. La *molteplicità d'intersezione di* V, W *lungo* C è data dalla molteplicità d'intersezione in P delle sezioni di V, W col predetto S_{d-l} generico[10].

La definizione di Weil.

2. Ecco ora la definizione di WEIL[11].

Conservate le notazioni e le ipotesi precedenti, vogliamo definire la molteplicità d'intersezione delle V, W lungo C ($h + k - r \geqq 0$). All'uopo si consideri il prodotto $V \times W$ costituito dalle coppie X, X', essendo il punto X variabile su V ed il punto X' su W. Sia: P un punto generico di C; $F_j(X - P) = 0 (j = 1, \ldots, r)$ un sistema di r equazioni lineari, aventi una sola soluzione sullo spazio tangente in P ad M_r.

Lo spazio lineare $F_j(X - X') = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ contiene la *varietà diagonale* inerente a C, cioè l'insieme delle coppie X, X' per cui X, mobile su C, coincide con X'.

---

[9]) Se P appartiene ad una componente di dimensione anormale, la molteplicità di questa fra le componenti dell'interferenza di V, W si valuta com'è spiegato nella mia Memoria del 1933 (ved. il successivo n. 23).

[10]) L'esser generico P sulla C, che si suppone non sia luogo di punti multipli di M_r, significa 1) che P è semplice per M_r; 2) che fra le coppie incidenti (P, S_{d-l}) quelle per cui la molteplicità d'intersezione in P delle sezioni di V, W con S_{d-l} è maggiore del minimo valore che questa molteplicità può conseguire al variare di P su C, costituiscono una varietà algebrica subordinata entro la varietà irriducibile di tutte le coppie (P, S_{d-l}) (P variabile su C e S_{d-l} passante per P).

[11]) Foundation, etc.; Cap. VI, pag. 142.

La molteplicità d'intersezione della varietà diagonale nella complessiva intersezione di $V \times W$ con lo spazio lineare $F_j(X - X') = 0$ è, per definizione, la molteplicità d'intersezione di C, quale componente dell'intersezione di V, W in M_r.

Questa è indubbiamente una definizione elegante e semplice, la quale (come si è già detto) riduce il concetto di molteplicità d'intersezione di V, W lungo C al concetto di molteplicità d'intersezione d'una varietà con uno spazio lineare: il qual concetto s'intende stabilito coi mezzi elementari noti. Naturalmente la definizione esposta in tanto è legittima, in quanto si provi, come l'Autore citato fa, che il numero definito è indipendente dagli elementi arbitrari, che compaiono nella definizione: che nel caso della molteplicità d'intersezione 1 si ricade nella definizione usuale; ecc.

Ci renderemo ora conto del valore geometrico della definizione di Weil e, constateremo così ch'essa può farsi derivare senza difficoltà dalla nostra ed anzi che equivale a proprietà considerate da tempo nell'indirizzo che ci è consueto (n. 5, Oss. 2^a).

Rapporti fra le due definizioni.

3. Anzitutto potremo abbreviare l'esposizione riferendoci al caso $h + k = r$, perché anche qui il caso $h + k > r$ può ridursi a questo per sezione con un conveniente spazio lineare.

Le V_k, W_{r-k} hanno dunque nel punto semplice P di M_r un'intersezione isolata.

Fisseremo l'attenzione sulla varietà di Corrado Segre $T = S_d \times S'_d$, dello spazio S_ϱ [$\varrho = d(d+2)$] prodotto dello spazio ambiente S_d di M_r, percorso dal punto X, con lo spazio medesimo S'_d percorso dal punto X'; e indicheremo rispettivamente con Y, Z i prodotti $M_r \times M'_r$, $V \times W$ tracciati su T, ove V è percorso da X e W da X'; e con U, U_0 le varietà diagonali di T, Y.

Le varietà T, U son prive di punti multipli in S_ϱ e le Y, U_0 possiedono in $P \times P$ un punto semplice.

In primo luogo supponiamo che le V, W s'incontrino semplicemente in P; e, se P non è al finito, portiamolo al finito con una trasformazione omografica, onde usare più comodamente coordinate non omogenee. La trasformazione, essendo dovunque biregolare, non altera la proprietà da considerarsi.

La rappresentazione parametrica nello S_ϱ delle coordinate omogenee ξ del punto $X \times X'$ mobile su T, s'imaginerà ottenuta alla maniera di C. Segre, mediante i prodotti a due a due delle coordinate omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_d, 1$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_d, 1$ dei punti X, X'. Vi saranno così, fra le $(d+1)^2$ coordinate ξ, d uguali alle x ed altrettante uguali alle x', le chiameremo coordinate $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$.

Lo spazio lineare $F_j(X-P)=0$, considerato da Weil, potrà rappresentarsi in S_d con r equazioni lineari (omogenee nelle differenze $x-p$, fra le coordinate omonime di X, P) del tipo:

$$\bar{F}_j(x-p)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,r).$$

E lo spazio lineare $\bar{F}_j(X-X')=0$ potrà rappresentarsi nello spazio S_ϱ con equazioni del tipo:

$$\bar{F}_j(x-x')=0 \qquad (j=1,2,\ldots,r)$$

lineari omogenee nelle differenze $x-x'$.

La falda lineare di M_r avente l'origine in P è rappresentata in S_d da un sistema di $d-r$ equazioni olomorfe:

$$\Theta_m(x)=0 \qquad (m=1,2,\ldots,d-r),$$

le $\Theta_m(x)=0$ essendo singolarmente falde *lineari* a $d-1$ dimensioni di S_ϱ, aventi l'origine P e funzionalmente indipendenti attorno a P [12].

Similmente sieno:

$$\Theta_m(x)=0,\ \varphi_{m_1}(x)=0 \qquad (m=1,\ldots,d-r;\ m_1=1,\ldots,r-k)$$

$$\Theta_m(x)=0,\ \psi_{m_2}(x)=0 \qquad (m=1,\ldots,d-r;\ m_2=1,\ldots,k)$$

i sistemi di equazioni olomorfe rispettivamente rappresentativi delle falde lineari di V, W aventi l'origine P, ove le d equazioni

(1) $\quad \Theta_m=0,\ \varphi_{m_1}=0,\ \psi_{m_2}=0$ (le m, m_1, m_2 variando come sopra)

son funzionalmente indipendenti nell'intorno di P.

Le $2d-r$ equazioni

(2) $$\Theta_m(x)=0,\ \Theta_m(x')=0,\ \varphi_{m_1}(x)=0,\ \psi_{m_2}(x')=0$$

rappresentano in T la falda con cui Z passa per $P\times P$ [13]. Si riconosce subito che anche questa falda è lineare, perché le singole falde lineari (2) di origine $P\times P$ sono, nell'intorno dell'origine, funzionalmente indipendenti. Da ciò una prima conseguenza:

a) *Se le V, W s'incontrano semplicemente nel punto semplice P di M_r, il loro prodotto $Z=V\times W$ sopra $Y=M_r\times M_r'$ passa per $P\times P$ con una falda lineare.*

Si osservi inoltre che nelle (2) figurano soltanto le coordinate $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ del punto mobile $X\times X'$ e che le (2) per $X=X'$ riduconsi alle d

[12]) Ved. le mie Vorlesungen über algebraische Geometrie (Leipzig, Teubner, 1921; pag. 309). Ved. altresì per più ampie considerazioni sulle falde analitiche ed in particolare lineari, la mia Memoria, Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica (Annali di Matematica, t. 43_4, 1944,; pag. 159).

[13]) Per ottenere la rappresentazione di detta falda in S_ϱ occorrerebbe aggiungere le equazioni (quadratiche) di T in S_ϱ.

equazioni (1), le quali interpretate in Y, hanno sulla U_0 una sola soluzione semplice in $P \times P$, perché nell'intorno di $P \times P$ esse son funzionalmente indipendenti. Ne deriva che:

b) *Nell'ipotesi precedente, la varietà diagonale U_0 del prodotto $Y = M_r \times M'_r$ ha in $P \times P$ una intersezione semplice con* Z.

4. Sia infine P un'intersezione isolata qualunque, anche non semplice, delle V, W e V sia mobile nel sistema Σ, come al n. 1. La generica $\overline{V}$ dell'intorno di V in Σ incontra allora semplicemente W, attorno a P, in i punti ed il prodotto $\overline{Z} = \overline{V} \times W$ possiede nell'intorno di $P \times P$ altrettanti punti semplici, imagini delle predette intersezioni. In ciascuno di questi $\overline{Z}$ taglia semplicemente U_0, in virtù di b).

Se $\overline{V} \to V$, la $\overline{Z}$ tende a Z e le i intersezioni semplici di $\overline{Z}$, U_0 attorno a $P \times P$ tendono al punto $P \times P$, per cui U_0 passa (semplicemente).

Se nè V nè W son variabili in M_r, si applicherà alle V, W, e in conseguenza alle Z, U_0, il procedimento indicato alla fine del n. 1 e si concluderà similmente che le molteplicità d'intersezione di V, W in P e di $V \times W$, U_0 in $P \times P$ son uguali. Pertanto:

c) *Tenuta ferma la definizione di molteplicità d'intersezione data dall'Autore nel 1933, le molteplicità d'intersezione di V, W in una loro intersezione isolata P (semplice per M_r) e del prodotto $V \times W$ con la varietà diagonale U_0 di $M_r \times M'_r$ nel punto $P \times P$ (semplice per $M_r \times M'_r$) sono uguali.*

Uguaglianza delle molteplicità desunte dalle due definizioni.

5. Un piccolo passo ancora ci conduce a provare che il numero i, secondo l'antica accezione, è identico a quello definito secondo Weil.

Invero in S_ϱ lo spazio $S_{\varrho-r}$, diciamolo α, di equazioni $\overline{F}_j(x - x') = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ considerato con Weil nel n. 2, in relazione ad uno spazio S_{d-r} di S_d, di equazioni $\overline{F}_j(x - p) = 0$, passante pel punto P di coordinate non omogenee p, e indipendente dallo S_r tangente in P ad M_r, incontra *semplicemente* in $P \times P$, entro S_ϱ, la varietà $M_r \times P$.

Quest'affermazione si dimostra così. La falda lineare di Y, di origine $P \times P$, è rappresentata in T dalle equazioni $\Theta_m(x) = 0$, $\Theta_m(x') = 0$ e dentro T, la falda lineare con cui $M_r \times P$ passa per $P \times P$, è data da $x_n = p'_n$ $(n = 1, \ldots, d)$, $\Theta_m(x) = 0$ $(m = 1, \ldots, d - r)$, ove le $p'(= p)$ son le coordinate non omogenee di P. Le $2d$ equazioni $x_n = p'_n$, $\Theta_m(x) = 0$, $\overline{F}_j(x - x') = 0$ rappresentano dunque l'interferenza di $M_r \times P$ con α, nell'intorno di $P \times P$; e quest'interferenza consta del solo punto $P \times P$, contato semplicemente, perché le falde lineari rappresentate da quelle equazioni son funzionalmente indipendenti attorno a P.

Si aggiunga che l'interferenza di α con Y consta intanto della varietà U_0 per cui α passa; e nell'intorno di $P \times P$ quest'interferenza

riducesi soltanto alla falda lineare di U_0 per $P \times P$, perché U_0 sega *ogni* $M_r \times X'$, e quindi anche $M_r \times P$, in una sola intersezione semplice, che per $M_r \times P$ è appunto $P \times P$; e α sega $M_r \times P$ alla stessa guisa; sicché l'ulteriore intersezione di α con Y *non passa per* $P \times P$. In conclusione:

d) *La molteplicità d'intersezione di* $V \times W$ *con la varietà diagonale* U_0 *in* $P \times P$, *entro* Y, *uguaglia la molteplicità d'intersezione ivi di* $W \times W$ *con uno spazio lineare generico* $S_{\varrho-r}$ *passante per* U_0, *entro lo spazio ambiente* S_ϱ.

Così resta dimostrato che la nostra definizione di molteplicità d'intersezione equivale a quella di Weil.

Osservazione 1ª. In realtà nella definizione di Weil invece di un $S_{\varrho-r}$ generico passante per U_0, figura lo $S_{\varrho-r}$ particolare α. Ma è ovvio che, se fra gli $S_{\varrho-r}$ per U_0 ve n'è uno, α, che incontra Y in U_0 e ulteriormente in una varietà *non passante* per $P \times P$, le stesso accade per lo $S_{\varrho-r}$ generico contenente U_0; potendo avvenire soltanto che l'ulteriore intersezione passi per $P \times P$ in corrispondenza agli $S_{\varrho-r}$ di una varietà subordinata nel sistema lineare degli $S_{\varrho-r}$ contenenti U_0[14]).

Osservazione 2ª. Che la molteplicità d'intersezione di V_k, W_{r-k} in P debba esser uguale alla molteplicità d'intersezione di $V \times W$ con U_0 in $P \times P$, poteva prevedersi a priori, in quanto, se le V, W si segano in un numero finito di punti (semplici per M) e son variabili in sistemi algebrici infiniti — e a questo caso, con piccoli spostamenti di V, W, o con l'artificio di cui alla fine del n. 1, ci si può sempre ridurre — il numero delle loro intersezioni (semplici per le V, W generiche entro i loro sistemi) si conserva immutato al variare delle V, W. D'altronde tale numero è uguale a quello delle coincidenze della corrispondenza ∞^r costituita su M_r dalle coppie X, X' con X su V e X' su W; cioè al numero delle intersezioni (semplici) di $V \times W$ con U_0[15]).

---

[14]) Si può aggiungere che la varietà diagonale U di T (e quindi la U_0 di Y) appartiene entro S_ϱ ad uno spazio lineare S_τ di dimensione $\tau = \varrho - \binom{d+1}{2}$. Invero, ogni iperpiano di S_ϱ rappresentato dall'annullarsi di una forma bilineare nelle coordinate omogenee dei punti X, X' di M_r, M'_r, la quale svanisca identicamente per $X = X'$ (come accade appunto per l'iperpiano α), passa per U. Ora ogni forma del tipo indicato è combinazione lineare dei determinanti di secondo ordine estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di X, X'; epperò le forme siffatte sono $\binom{d+1}{2}$ linearmente indipendenti. L'interferenza di S_τ con Y, in quanto è luogo dei punti di Y dove è nulla la precedente matrice, coincide con U.

[15]) Questo concetto è già realizzato per le corrispondenze sopra una curva nel mio Trattato di geometria algebrica (Bologna, Zanichelli, vol. P, parte I, 1926).

Per arrivare alla definizione di Weil secondo la via accennata, che rientra nel quadro delle considerazioni a noi familiari, basta stabilire soltanto la proprietà *d*), la quale, come si è visto, si consegue facilmente.

Limiti d'invarianza delle due definizioni.

6. Proviamo ora che *la nostra definizione ha carattere intrinseco e invariante per trasformazioni pseudoconformi*[16]) *(in particolare birazionali senza eccezioni).*

Riferiamoci prima a due varietà di dimensioni complementari nell'ambiente M_r.

Intanto nella definizione di cui si parla intervengono soltanto elementi interni ad M_r (anche se i mezzi con cui essa si consegue, allo stato della teoria, sono estrinseci). Si è cercato di soddisfare a tale requisito, in vista delle applicazioni alla geometria *sopra* M_r, la quale, almeno nelle formulazioni conclusive, richiede concetti intrinseci[17]).

In verità nella definizione del 1933 c'è un residuo in apparenza estrinseco (perché relativo all'ambiente proiettivo di M_r) là dove la valutazione della molteplicità d'intersezione si riduce al computo di certe intersezioni „semplici", che sono proiettivamente definite. Ma è facile passare anche qui ad una nozione intrinseca.

Si consideri una trasformazione pseudoconforme T tra gl'intorni di due punti semplici P, P' di due varietà algebriche M_r, M'_r. L'ipotesi che i punti sieno semplici è essenziale, almeno in una certa misura, che sarà in seguito specificata.

Una falda lineare φ, ∞^k, di origine P, sopra M_r, è proiettivamente definita dalla condizione di essere del 1° ordine (ossia intersecata attorno a P in un sol punto da un S_{d-k} dell'ambiente S_d di M_r prossimo ad un S_{d-k} uscente da P, indipendente dallo S_r tangente ivi a M_r) od anche dalla condizione (equivalente) di esser rappresentabile in S_d con un sistema di $d-k$ equazioni olomorfe e funzionalmente indipendenti attorno a P. Ma, a malgrado di questo suo carattere

---

[16]) Così ho denominato da tempo — e la denominazione è stata adottata da E. Cartan e dalla sua scuola — le trasformationi analitiche biregolaii. Non sto qui a ripeter la ragione della denominazione.

[17]) Se si astrae da questo scopo, basta la nozione introdotta nella prima parte della Memoria del 1933 relativa alla molteplicità d'intersezione entro un ambiente lineare. E ciò perché la definizione sopra una qualunque M_r, nell'intorno di un suo punto semplice P, ne deriva per proiezione dell'intorno di P da un S_{d-r-1} generico, sopra l'intorno di un punto di un S_r (proiezione biregolare), in quanto il numero definito riesce indipendente dagli elementi arbitrari della proiezione. Invece nella Memoria del 1933 si reputò necessario una definizione intrinseca, che aderisse meglio al significato geometrico infinitesimale del fatto da esprimere.

proiettivo, φ si muta, mediante T, in una falda *lineare* φ', ∞^k, di origine P', tracciata su M_r'. In sintesi si potrebbe dire che la linearità della falda impegna soltanto l'intorno di 1° ordine e le trasformazioni pseudoconformi, che mutino un punto semplice in un punto semplice, non alterano la linearità degli intorni di 1° ordine, in quanto inducono tra essi un'omografia.

Proviamo dunque che la falda φ', omologa di φ nella T, è lineare. Basta all'uopo tener conto che scelta una parametrizzazione assolutamente regolare[18]) della falda lineare Φ, ∞^r, con cui M_r passa per P (ottenuta per esempio con la proiezione di Φ sopra un S_r da un S_{d-r-1} sghembo con lo S_r tangente in P a Φ) φ viene ad esser rappresentata da un sistema di $r-k$ equazioni negli r parametri, olomorfe e funzionalmente indipendenti in P: e che tali caratteristiche delle equazioni non mutano con la trasformazione pseudoconforme T.

Stabilita *l'invarianza della linearità delle falde di origine P in una trasformazione pseudoconforme, che conservi la linearità della falda ambiente*, a cagione dell'omografia indotta da T fra le stelle tangenti in P, P' a M_r, M_r', spazi tangenti indipendenti si mutano in spazi tangenti indipendenti, epperò un'intersezione semplice in P di due falde lineari di dimensioni complementari e di origine P, ha carattere invariante. E si noti che, pel teorema d'esistenza delle funzioni analitiche implicite, viene conservata anche, per una coppia di falde lineari di dimensioni complementari tracciate nell'intorno di M_r, la definizione infinitesimale dell'intersezione semplice.

A questo punto è da osservarsi che *la linearità della falda ambiente non è strettamente necessaria pel tipo di conclusioni che si vogliono trarre. Ci si può cioè riferire anche ad una falda di M_r avente l'origine in un punto multiplo P di M_r*, purché la falda (varietà analitica o caratteristica, secondo la denomicazione di Levi-Civita, irriducibile in piccolo attorno a P e costituente un intorno, parziale o totale, del punto P sopra M_r) goda della proprietà di essere di *ordine invariantivo (relativo) uno*, cioè di ammettere una rappresentazione parametrica assolutamente regolare, in guisa da risultare, dal punto di vista delle trasformazioni pseudoconformi, equivalente ad una falda lineare[19]). Sopra una tal falda le corrispondenti delle falde lineari sono

[18]) Ved. a tal proposito la mia citata Memoria, Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica (Annali di Matematica, 1944).

[19]) I rami di curva algebrica sono tutti equivalenti a rami lineari; non così le falde di varietà. Perché una falda sia equivalente pseudoconformemente ad una falda lineare è necessario che il suo cono tangente nell'origine sia razionale. Perciò p. es. un punto triplo conico ordinario d'una superficie di S_3 è origine di una falda di 3° ordine non equivalente ad una falda lineare (e quindi non regolarmente parametrizzabile). Invece un punto cuspidale ordinario d'una superficie è origine d'una falda di 2° ordine, equivalente ad una falda lineare.

invariantivamente definite e così le loro intersezioni semplici; ecc. E perciò tutto quanto si dice per le falde lineari si può applicare a falde di questa natura. In questo senso abbiamo sopra avvertito che la semplicità dei punti P, P' di M_r, M'_r non è strettamente necessaria. Basta riferirsi a due punti origini di falde equivalenti, in modo pseudoconforme, a falde lineari.

Ritornando ora alla nostra questione principale, si conclude senz'altro nel modo enunciato al principio di questo n.

7. Dal n. prec. si trae come corollario che *la molteplicità s di un punto multiplo P di una V_k algebrica tracciata su M_r, quando P è semplice per M_r, è invariante per trasformazioni pseudoconformi dell'intorno di P in M_r, che conservino la linearità dell'intorno:* proposizione questa di uso frequente in geometria algebrica (limitatamente alle trasformazioni birazionali), della quale non mi consta sia mai stata data una dimostrazione generale.

Infatti la molteplicità di P per V_k non è che la molteplicità d'intersezione di V_k e della W_{r-k} segata su M_r da un S_{d-k} generico per P.

8. Dobbiamo infine considerare due varietà V_k, W_h di M_r aventi in comune il punto P semplice per M_r, quando è soddisfatta la disuguaglianza $l = h - k - r > 0$ e le due varietà s'incontrano attorno a P lungo una varietà pura C di dimensione normale l.

La molteplicità d'intersezione i delle V_k, W_h in P (mediante sezione delle V, W con uno spazio lineare S_{d-l}, dell'ambiente S_d di M_r, passante e per P e non tangente ivi a C) è, a norma della Memoria del 1933, la medesima di quella che presentano, nel punto proiezione di P, le proiezioni delle V, W, sopra un S_r, da un S_{d-r-1} sghembo con lo S_r tangente a M_r in P.

La questione è così ricondotta al caso in cui l'ambiente M_r è uno spazio proiettivo S_r. Esaminiamo dunque questo caso, dimostrando che la molteplicità d'intersezione i delle V, W, dedotta per sezione con un S_{d-l} passante per P e non tangente ivi a C, è la stessa di quella che similmente si ottiene segando con una falda lineare φ_{r-l} di origine P, dello S_r, la quale non tocchi in P la C.

Diciamo all'uopo $\overline{V}_k$ la trasformata di V_k con un'omografia di S_r, generica nell'intorno dell'omografia identica. Allora (secondo la Memoria del 1933) le $\overline{V}$, W si tagliano, nelle vicinanze di P, lungo una varietà $\overline{C}$, di dimensione normale l, la quale, alla sua volta, è tagliata dallo S_{r-l} tangente in P a φ, in i intersezioni semplici. Ognuna di queste è origine di una falda lineare ∞^l, contenuta in $\overline{C}$. E siccome l'origine di questa falda è vicina quanto si vuole alla falda fissa φ, di origine prossima a P e di dimensione complementare, così le due falde s'incontrano, attorno alle loro vicinissime origini, in un punto ed in un solo, perché i loro spazi tangenti nelle origini, in quanto prossimi a due spazi di uguali dimensione indipendenti, sono indipendenti.

Viceversa, ogni intersezione (necessariamente semplice) di φ con $\bar{C}$ nell'intorno di P, essendo origine di una falda lineare di $\bar{C}$ e avendo l'origine prossima allo S_{r-l} tangente in P a φ, è vicinissima a un'intersezione semplice di questo S_{r-l} con C.

Insomma φ e il suo S_{r-l} tangente segano $\bar{C}$, nelle vicinanze di P, nello stesso numero i d'intersezioni semplici e si conclude che *se la molteplicità d'intersezione i delle* V_k, W_h $(h+k-r=l>0)$ *tracciate su* M_r *e incontrantesi nell'intorno di P in una varietà pura di dimensione normale l, si definisce segando con una falda lineare* ∞^{r-l}, *di origine P, non tangente ivi a C, l'intero i ottenuto è indipendente dal cangiamento della falda considerata sotto le ipotesi espresse:* epperò esso è uguale a quello ottenuto segando con un S_{d-l} lineare, ossia con la falda lineare ∞^{r-l} traccia di questo su M_r. La definizione attuale, di manifesto carattere intrinseco e invariante, equivale dunque a quella del 1933.

Quanto P sia generico in C il numero definito è la *molteplicità d'intersezione delle* V, W *lungo* C.

9. Ritornando ora alla definizione di Weil osserveremo che il carattere proiettivo della definizione si può subito eliminare, trasformando la definizione stessa in una di carattere invariante, ma non intrinseco. Basta all'uopo prendere come molteplicità d'intersezione delle V, W in P la molteplicità d'intersezione di $V \times W$ con U_0 in $P \times P$. Invero, gli enti $V \times W$, U_0 son collegati invariantivamente (rispetto a trasformazioni birazionali) con V, W, M_r; ma sono enti esterni ad M_r.

Estensione alle varietà analitiche.

10. La maggior parte delle considerazioni e dei concetti precedenti *si può trasportare alle varietà algebroidi attorno ad un punto P, tracciate sopra una falda lineare di origine P.* Ci limitiamo a pochi cenni in proposito.

Con argomentazioni pressoché identiche a quelle del n. 4 della mia Memoria del 1933 si prova che, se le varietà algebroidi (irriducibili o pure in piccolo) V_k, W_{r-k} di un S_r, hanno in comune il punto P attorno a cui esse son definite, la trasformata di una di esse mediante un' omografia genericamente prossima all'identità, taglia l'altra in un certo numero finito i d'intersezioni semplici (origini per ambedue le varietà di falde lineari a spazi tangenti indipendenti) e questo numero non cangia, mutando le veci delle due varietà. Quando le V, W abbiano in P un'intersezione isolata, i definisce la *molteplicità d'intersezione delle due varietà algebroidi in P.*

Il caso di due varietà algebroidi definite attorno all'origine P di una falda lineare Φ_r, che le contiene, si riconduce al procedente mediante proiezione sopra un S_r, in quanto questa è una trasforma-

zione pseudoconforme tra Φ_r e l'intorno di un punto di S_r, in cui quella falda si proietta.

Se poi le V, W hanno le dimensioni k, h, con $k+h-r=l>0$, e si tagliano attorno a P lungo una varietà analitica C, di dimensione normale l, la loro molteplicità d'intersezione si definisce segandole in P con una falda lineare di origine P, appartenente alla falda lineare ambiente Φ_r, di dimensione $r-l$ e non tangente in P a C.

Il concetto è invariante per trasformazioni pseudoconformi.

In particolare *la molteplicità s di una varietà algebroide pura nell'origine P della falda lineare ambiente ov'essa è definita, è invariante per trasformazioni pseudoconformi, che rispettino la linearità della falda ambiente.*

Se la varietà è non soltanto pura, ma irriducibile in piccolo, ossia è una *falda* (analitica), la sua molteplicità nell'origine P della falda è l'*ordine* della falda: e dunque *non soltanto per le falde lineari (di 1° ordine), ma anche per le falde di ordine qualunque tracciate sopra una falda lineare Φ, avente la stessa loro origine, l'ordine è invariante per ogni trasformazione pseudoconforme che muti Φ in un'altra falda lineare.*

Una nuova dimostrazione puramente geometrica del teorema di Bézout.

11. Ecco ora la dimostrazione del teorema di Bézout per r equazioni algebriche in r variabili, cui si è alluso nell'introduzione.

Consideriamo il sistema lineare Σ, di dimensione $N=\binom{l+r}{r}-1$, delle forme d'ordine l di S_r. Esso gode delle proprietà seguenti:

1) È privo di punti base, perché si può sempre costruire una forma d'ordine l (p. es. mediante iperpiani) che non passi per un punto comunque prefissato di S_r.

2) È semplice, ossia tutte le forme di Σ, che passano per un punto *qualunque* P di S_r, non hanno altri punti comuni. Preso invero un punto Q di S_r, distinto da P, si può costruire una forma d'ordine l passante per P e non per Q: p. es. la somma d'un iperpiano per P e non per Q e di una forma d'ordine $l-1$ generica.

Si può pertanto fare l'imagine proiettiva M_r dello S_r entro un S_N a mezzo del sistema Σ[20]. La varietà M_r si costruisce ponendo le coordinate proiettive omogenee di un punto di un S_N proporzionali ad $N+1$ forme linearmente indipendenti, di ordine l [le quali forme non hanno alcun punto comune, se no si contraddirebbe a 1)].

La M_r è in corrispondenza birazionale *senza eccezioni* con lo S_r. Le sezioni iperpiane di M_r son le imagini delle forme di ordine l di S_r. Le omografie di S_r mutano in sè il sistema lineare di tutte le

[20]) Varietà considerata pel primo da Veronese (Rendiconti dei Lincei 1884).

forme di ordine l di S_r epperò inducono su M_r un gruppo continuo di trasformazioni birazionali (senza eccezioni), che mutano sezioni iperpiane in sezioni iperpiane; cioè in un gruppe di omografie. E questo gruppo è transitivo su M_r, come il gruppo corrispondente sopra S_r. Perciò due punti qualunque di M_r sono proiettivamente equivalenti; e dunque sono tutti semplici.

La corrispondenza senza eccezioni fra S_r ed M_r, essendo birazionale e quindi continua, muta gli elementi lineari di S_r negli elementi lineari di M_r; e quindi forme di S_r che passino semplicemente per un punto P, senza avere ivi tangenti comuni, in sezioni iperpiane di M_r passanti semplicemente pel punto omologo P', senza avere ivi tangenti comuni; e viceversa.

Ad una r-pla di forme di ordine l di S_r risponde una r-pla di sezioni iperpiane di M_r: le due r-ple si diranno *associate*. Esse son insieme linearmente indipendenti: perciò ad una r-pla di forme d'ordine l linearmente indipendenti di S_r resta associato un S_{N-r} di S_N: ai punti comuni alla r-pla i punti comuni ad M_r e allo S_{N-r}.

Sia S_{N-r} generico entro S_N (e precisamente non appartenente alla varietà algebrica subordinata alla grassmanniana degli S_{N-r} di S_N, riempita dagli S_{N-r} che toccano in qualche punto M_r o che hanno con M_r infinite interferenze). Allora le intersezioni di S_{N-r} con M_r son tutte semplici (le due varietà S_{N-r} ed M_r, di dimensioni complementari, passano per ciascuna di quelle intersezioni semplicemente senza toccarsi) e il loro numero uguaglia l'ordine μ di M_r. Ne deriva che una r-pla generica di forme di S_r (necessariamente indipendenti per la genericità) dà luogo a μ intersezioni semplici (per ciascuna delle quali passano semplicemente le r forme, senza avere alcuna tangente comune).

Il numero μ si conserva costante, se non diviene infinito, al variare dello S_{N-r}, cioè delle r forme associate, purché ciascuna interferenza isolata P di r forme particolari [21]) si conti con la propria „molteplicità d'intersezione" i uguale a quella con cui il punto P' si deve contare fra le intersezioni di S_{N-r} ed M_r.

Essendo poi i il numero delle intersezioni semplici prossime a P' in cui M_r è segata da un S_{N-r} genericamente prossimo al dato (e quindi non passante per P'), il numero i uguaglia anche quello delle intersezioni semplici prossime a P, in cui si segano le forme di una r-pla genericamente prossima alla data (ossia di forme, necessariamente linearmente indipendenti, appartenenti a un intorno abbastanza ristretto della r-pla considerata, e non aventi l'intersezione P).

Se inoltre per un S_{N-r} particolare vi sono infinite interferenze con M_r e un'interferenza isolata P', la molteplicità d'intersezione dello

[21]) Le quali son necessariamente linearmente indipendenti, in quanto abbiano un'intersezione isolata.

S_{N-r} con M_r in P' e delle r forme associate (linearmente indipendenti) nel punto omologo P, può ancora esser valutata come sopra.

Ne deriva che l'ordine μ di M_r può esser valutato intersecando r forme qualunque d'ordine l di S_r, le quali abbiano soltanto intersezioni semplici, com'è appunto il caso di r forme ciascuna delle quali consti di iperpiani generici.

Pertanto $\mu = l^r$ e *si conclude col teorema di Bézout nei caso di r forme di S_r aventi ordini uguali.*

Tutto ciò può apparire nuovo soltanto a chi non abbia completa conoscenza della geometria algebrica italiana: per chiunque invece abbia esperienza in questo campo, quanto abbiamo esposto è in fondo una precisazione ed un collegamento di circostanze note, enunciate però di solito sotto forma più breve, il cui significato ci è stato sempre familiare per l'uso quasisecolare dei nostri maestri e nostro da mezzo secolo.

12. Vediamo ora come si compia il passaggio ad r forme $A_1, A_2, \ldots, A_r$ aventi ordini qualunque $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Scelto un intero l, non minore del massimo degli n, diciamo $B_1, B_2, \ldots, B_r$ r forme di S_r aventi gli ordini rispettivi $l - n_1, l - n_2, l - n_r$ e costituite ciascuna da tanti iperpiani generici quant'è l'ordine della forma. Supponiamo inoltre acquisito il teorema che abbiamo in vista (e del quale ci risparmiamo il notissimo enunciato) negli spazi di dimensione $< r$. Poniamo:

$$C_1 = A_1 + B_1,\ C_2 = A_2 + B_2, \ldots, C_r = A_r + B_r.$$

Designato il numero delle interferenze di r forme di S_r (quand'è finito) scrivendo tra graffe il simbolo delle forme di cui si parla, nell'ipotesi che le $A_1, A_2, \ldots, A_r$ non abbiano infinite interferenze, attesa la genericità degl'iperpiani costituenti le $B_1, B_2, \ldots, B_r$, potremo scrivere:

$$(3)\quad \{C_1, C_2, \ldots, C_r\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\} + \sum \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_q}, B_{i_{q+1}}, \ldots, B_{i_r}\}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le possibili combinazioni semplici di q delle A ($q = 0, 1, \ldots, r-1$) e di $r-q$ delle B.

Il valore dei singoli addendi del sommatorio si calcola col teorema di Bézout negli spazi lineari di dimensione $< r$ o per $q = 0$ intersecando fra loro le forme $B_1, \ldots, B_r$ costituite soltanto da iperpiani; il valore del primo membro è noto in virtù di quanto si è dimostrato nel n. precedente. Ne deriva il valore di $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. A calcoli fatti si trova il prodotto $n_1 n_2 \ldots n_r$. E si riconosce di più che, se le intersezioni delle $A_1, A_2, \ldots, A_r$ son tutte semplici, il loro numero è espresso da questo prodotto; altrimenti ciascuna va contata con la debita molteplicità, il cui significato risulta senz'altro il consueto.

Se le $A_1, A_2, \ldots, A_r$ hanno infinite intersezioni (e quindi così avviene delle $C_1, C_2, \ldots, C_r$), la relazione (3) deve intendersi, per tutti i simboli che in esse figurano, limitata alle intersezioni isolate e si sbocca nel solito significato della molteplicità d'intersezione in ciascuna di queste. Dunque:

Il teorema di Bézout per r forme algebriche di S_r può conseguirsi rigorosamente, con semplice procedimento geometrico, che comprende la precisazione del significato delle molteplicità d'intersezione per le interferenze isolate, anche quando, oltre queste, ne esistono infinite altre.

Un metodo geometrico per ottenere rapidamente il risultante.

13. Il procedimento esposto, algebricamente interpretato, sbocca in modo ovvio nel risultante di $r+1$ forme del medesimo ordine in $r+1$ variabili; e da questo non è difficile trarre, mercé il concetto del n. prec., il risultante per $r+1$ forme di ordini qualunque. Ma è molto più semplice ragionare come segue.

Consideriamo la varietà di Segre W_t di dimensione $t = \sum_{i=0}^{r} N_i - r - 1$ $\left[N_i = \binom{n_i + r}{r};\ i = 0, 1, \ldots, r;\ n_0 = n\right]$ imagine delle $(r+1)$-ple di forme di ordini rispettivi $n, n_1, \ldots, n_r$ appartenenti ad S_r. Entro W_t le $(r+1)$-ple di forme passanti pei singoli punti di S_r formano un connesso irriducibile di dimensione massima $t-1$, che è *perciò* rappresentabile entro W_t *con una sola equazione*[22]). Designati con $u(u_0, \ldots, u_{N_0})$, $u'(u'_0, \ldots, u'_{N_1}), \ldots, u^r(u^r_0, \ldots, u^r_{N_r})$ i coefficienti delle forme di una $(r+1)$-pla variabile in W_t[23]), il connesso predetto vien dunque rappresentato da un'equazione del tipo

$$D(u, u', \ldots, u^r) = 0, \tag{6}$$

ove D è una forma nelle singole serie di variabili, il cui grado, in ciascuna serie di variabili, è l'*indice* corrispondente del connesso.

La (6) esprime *la condizione necessaria e sufficiente perché le* $r+1$ *forme date abbiano un punto comune*, epperò riducesi al *risultante delle forme* $u, u', \ldots, u^r$.

Date genericamente le $u', \ldots, u^r$, l'indice del connesso, rispetto alle variabili u, uguaglia il numero dei sistemi lineari ∞^{N_0-2} di forme u, che passano pei singoli punti comuni alle $u', \ldots, u^r$; cioè (n. 12) il numero $n_1 n_2 \ldots n_r$ delle intersezioni (tutte semplici) delle $u', \ldots, u^r$; sicché i fattori lineari dell'equazione (6) nelle u sono tanti distinti quant'è il grado dell'equazione e sono dunque tutti semplici. Perciò

[22]) Per la teoria generale dei connessi rinvio ad una mia Memoria in corso di stampa negli Atti di Salamanca (ved. pure il fascicolo II delle mie citate lezioni di geometria numerativa; pag. 134 e segg.). Ivi appunto è dimostrato che un connesso algebrico di dimensione massima, entro il prodotto di più spazi lineari, è rappresentabile con una sola equazione nelle coordinate dei punti di questi spazi.

[23]) Nel seguito ogni forma viene indicata con la lettera che denota il complesso de'suoi coefficienti; così u, u'; etc.

il polinomio (6) è *omogeneo nei coefficienti di ciascuna delle* $r+1$ *forme date ed ha, rispetto ad essi, l'ordine uguale al prodotto degli ordini delle altre.*

Inoltre esso è *irriducibile* rispetto al complesso delle variabili indeterminate $u, u', \ldots, u^r$. Di più D *è individuato* (a meno di un fattore costante), perché ogni polinomio esprimente la detta condizione necessaria e sufficiente, rappresenta il connesso *irriducibile* di cui si è parlato [24]).

14. Quando le $u', u'', \ldots, u^r$ sono date comunque, purché segantisi in un numero finito di punti, la forma nelle u a cui riducesi $D(u, u', \ldots, u^r)$, uguagliata a zero, rappresenta pertanto coi suoi fattori lineari le interferenze delle date forme, in coordinate di forme u d'ordine n passanti per questi punti. In particolare, se $n = 1$, *la forma* $R(u)$, *a cui riducesi la* (6), *uguagliata a zero, rappresenta (in coordinate d'iperpiani) le stelle d'iperpiani aventi i centri nelle intersezioni delle date forme.*

Pertanto $R(u)$ è l'*u-risultante* (Mertens) delle forme $u', \ldots, u^r$, ben conosciuto negli sviluppi dell'algebra moderna [25]). Esso si decompone in tante forme lineari quante sono le stelle predette. È di grado $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e, quando le $u', \ldots, u^r$ son indeterminate, ha altrettanti fattori lineari semplici.

Secondo gli algebristi moderni la molteplicità d'intersezione di una r-pla qualunque $u', \ldots, u^r$ in ciascuno dei punti comuni (supposti in numero finito) è definita dall'esponente con cui il corrispondente fattore lineare di $R(u)$ figura nel polinomio stesso. È una definizione statica. Constateremo nel n. successivo che *ognuno di questi esponenti uguaglia alla sua volta anche la molteplicità d'intersezione delle* $u', \ldots, u^r$ *intesa in senso dinamico e geometrico.*

Lo u-risultante limite $R_\gamma(u)$ e il risultante ridotto.

15. Rappresentiamo la totalità delle r-ple (ordinate) $u', \ldots, u^r$ di forme degli ordini $n_1, \ldots, n_r$ dello S_r, coi punti della varietà di Segre V_τ (priva di punti multipli), di dimensione $\tau = \sum_{i=1}^{r} N_i - r$, prodotto

[24]) Per la teoria del risultante dal punto di vista algebrico moderno veggasi Mertens (Sitz. der math.-nat. Klasse der Wiener Akademie, 1886 e 1889); Macaulay (Proc. Lond. Math. Society, 1903); Hurwitz (Annali di Matematica, 1913); van der Waerden, Moderne Algebra (Springer, 1931). II Teil, S. 1 e segg.; Perron, Algebra (Göschen, 1932, II Auflage), S. 221, 274; Hodge e Pedoe, Methods of algebraic geometry (Cambridge, 1947), p. 139 e segg.; Gröbner, Moderne algebraische Geometrie (Springer, 1949), p. 39 e segg. Nel lavoro citato di Maucaulay (ved. anche Gröbner, l. c.) si dà un'esplicita espressione del risultante di $r+1$ forme di S_r come quoziente di due determinanti.

[25]) Ved. p. es. van der Waerden, Moderne Algebra (Springer, 1931), II Teil, S. 21.

degli r sistemi lineari di forme dei detti ordini situati in altrettanti spazi proiettivi S_r, sovrapposti al dato.

Riferiamoci dapprima al senso algebrico statico della molteplicità d'intersezione e proviamo che *le r-ple con un numero finito di intersezioni, di cui taluna non semplice, son rappresentate da punti d'una varietà algebrica subordinata a* V_τ.

Infatti, se una r-pla con un numero finito d'intersezioni possiede un'intersezione non semplice, $R(u)$ ha in corrispondenza un fattore lineare multiplo e i suoi coefficienti soddisfanno perciò ad un certo sistema di equazioni algebriche [26]).

Le r-ple con un numero finito d'intersezioni, di cui qualcuna non semplice, riempiono dunque in V_τ una varietà algebrica.

Anche *le r-ple con infinite intersezioni riempiono in* V_τ *una varietà algebrica*, perché esse son caratterizzate dall'annullarsi identico del polinomio $R(u)$. Invero, una r-pla con infinite intersezioni non può dare che un $R(u)$ identicamente nullo, in quanto esistono infinite stelle coi centri in punti comuni alle forme stesse; e, viceversa, se $R(u)$ si annulla identicamente, ogni iperpiano u di S_r fa parte di una stella col centro in qualche punto comune alle r forme date, e ciò significa che quell'iperpiano incontra il luogo delle interferenze delle r forme, il quale dunque contiene qualche componente di dimensione $\geqq 1$.

Siccome quando le $u', \ldots, u^r$ sono a coefficienti indeterminati, $R(u)$ non contiene che fattori lineari semplici, attesa l'irriducibilità di V_τ, si può legittimamente concludere che *una r-pla generica dà luogo ad un numero finito* $\mu = n_1\, n_2 \ldots n_r$ *d'intersezioni tutte semplici*, nel senso che le r-ple con infinite intersezioni o con un numero finito d'intersezioni, di cui talune non semplici (r-ple che chiameremo complessivamente "singolari"), appartengono ad una varietà algebrica (eventualmente riducibile e impura) E, le cui componenti hanno tutte dimensioni $< \tau$.

Ne deriva che nell'intorno dell'imagine su V_τ di una r-pla $u', \ldots, u^r$, *comunque fissata*, la varietà E penetra eventualmente, se $u', \ldots, u^r$ è singolare, con falde (analitiche) di dimensione $< \tau$, ma comunque esse non riempiono l'intorno; e la E non penetra affatto nell'intorno, se $u', \ldots, u^r$ non è singolare.

In conseguenza, può tracciarti su V_τ, in infiniti modi, un ramo analitico γ, avente l'origine nell'imagine di $u', \ldots, u^r$ e non appartenente ad E; questo ramo non ha con E nell'intorno dell'origine alcuna intersezione distinta dall'origine, epperò il punto mobile su γ, rappresenta una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ con un numero finito d'intersezioni tutte semplici. Dunque:

---

[26]) Quello che, nel sistema lineare delle forme di ordine $\mu = n_1\, n_2 \ldots n_r$ di un S_r, rappresenta le forme spezzate in forme lineari, di cui una almeno doppia.

Data una qualunque r-pla $u', \ldots, u^r$ di r forme di ordini $n_1, \ldots, n_r$ di S_r, anche con intersezioni non semplici o con infinite intersezioni, essa può sempre considerarsi quale limite di una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ la quale, durante la variazione (salvo eventualmente al limite), conservasi ognora con $n_1 n_2 \ldots n_r$ intersezioni semplici.

16. Tutto ciò premesso, *possiamo definire l'u-risultante $R_\gamma(u)$ relativo ad una r-pla qualunque $u', \ldots, u^r$ di forme di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e ad un ramo analitico γ di V_r, avente l'origine in $(u', \ldots, u^r)$.*

Sia, a questo scopo, λ un parametro uniformizzante biregolarmente γ e l'origine del ramo corrisponda a $\lambda = 0$. Allora i coefficienti dello u-risultante $\overline{R}(u)$ della r-pla non singolare variabile in γ, son funzioni olomorfe di λ, attorno a $\lambda = 0$.

Se $\nu \geqq 1$ è l'ordine *minimo* dei coefficienti di $\overline{R}(u)$ rispetto a λ, il polinomio $\frac{1}{\lambda^\nu}\overline{R}(u)$ per $\lambda \to 0$ tende ad un polinomio ben determinato $R_\gamma(u)$ *non identicamente nullo.*

Il centro di una delle stelle che annullano $\frac{1}{\lambda^\nu}\overline{R}(u)$ varia mantenendosi sempre comune alle $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, le quali hanno ordinatamente per limiti i polinomi $u', \ldots, u^r$. Perciò quel centro ha per limite una interferenza delle $u', \ldots, u^r$. Ne deriva che i fattori lineari di $R_\gamma(u)$, rappresentano altrettanti punti d'interferenza delle $u', \ldots, u^r$.

Qui possiamo subito fare due precisazioni. La prima è che $R_\gamma(u)$, a meno di un eventuale fattore costante non nullo, non dipende dal parametro λ, scelto per la rappresentazione biregolare di γ.

Infatti, se μ è un altro parametro analogo (che dia anch'esso l'origine per $\mu = 0$), i parametri λ, μ sono funzioni olomorfe l'uno dell'altro nell'intorno dell'origine, sicché il cangiamento del parametro porta al piú soltanto la moltiplicazione del limite per un fattore costante *non nullo.*

La seconda è che se $u', \ldots, u^r$ dà luogo ad un numero finito d'interferenze ed $R(u)$ è lo u-resultante ben determinato relativo ad una tale r-pla, i due polinomi $R(u)$, $R_\gamma(u)$ differiscono al più per un fattore costante non nullo, *qualunque* sia γ (non giacente in E).

Infatti, in questo caso i coefficienti di $\overline{R}(u)$, che son forme nei coefficienti di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, non si annullano tutti quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$, se no le $u', \ldots, u^r$ avrebbero infinite intersezioni. (In tal caso dunque, è $\nu = 0$). E siccome i coefficienti di $\overline{R}(u)$, come polinomi, son funzioni continue dei coefficienti di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, nel caso in esame, $R(u)$ è sempre limite di $\overline{R}(u)$.

Tenuto conto del teorema di continuità delle funzioni algebriche [27] se ne trae, nell'ipotesi di un numero finito di interferenze, che ogni

[27] Ved. le mie Lezioni di Analisi (Bologna. Zanichelli, II ed. 1946. p. 346).

fattore lineare i-plo di $R(u)$ è limite di i fattori lineari semplici di $\overline{R}(u)$; donde la conclusione preannunciata alla fine del n. 14.

Passiamo al caso che vi sieno infinite interferenze. Allora ciascuna dei fattori lineari di $R_\gamma(u)$ ha un proprio esponente e si ha dunque per quel dato γ una molteplicità statica di ognuno dei limiti delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, la quale molteplicità acquista valore geometrico, dinamico, in virtù del citato teorema di continuità; nel senso che in ognuna delle interferenze limite, confluisce un certo numero $i \geqq 1$ d'intersezioni semplici variabili delle $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ e la somma delle molteplicità ottenute è $n_1 n_2 \ldots n_r$, ossia il grado di $R_\gamma(u)$, perché, durante la variazione, il grado di $\overline{R}(u)$ rimane immutato.

Le molteplicità così definite dipendono a priori da γ. Occorre indagare in qual misura esse ne dipendono effettivamente.

Bisogna a questo punto distinguere le eventuali interferenze limiti indipendenti da γ, da quelle che dipendono effettivamente dalla scelta del ramo.

Mostriamo in primo luogo che ogni interferenza isolata P delle $u', \ldots, u^r$ è indipendente da γ.

Consideriamo all'uopo le r-ple passanti pel punto P, le quali costituiscono una varietà di Segre $Z_{\tau-r}(P)$ appartenente a V_τ. Le r-ple di $Z_{\tau-r}(P)$ aventi infinite interferenze attorno a P, formano un insieme, che è parte propria di $Z_{\tau-r}(P)$, perché $u', \ldots, u^r$ *non* appartiene a tale insieme. La totalità delle r-ple passanti per un dato punto Q dell'intorno di P in S_r, forma dunque una varietà $Z_{\tau-r}(Q)$ le cui r-ple prossime ad $u', \ldots, u^r$ hanno tutte, nelle vicinanze di P, un numero finito d'intersezioni (uguale alla molteplicità d'intersezione in P delle $u', \ldots, u^r$). Pertanto le r-ple prossime alla data e passanti pei punti Q, sono in corrispondenza bicontinua d'indici finiti con le posizioni di Q attorno a P; perciò le $Z_{\tau-r}(Q)$ sono ∞^r e riempiono V_τ.

Vuol dire insomma che *ogni* r-pla dell'intorno di $u', \ldots, u^r$ ha qualche interferenza nell'intorno di P. Epperò qualunque sia il ramo γ lungo il quale la r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ varia tendendo a $u', \ldots, u^r$, sempre qualche interferenza tende a P[28]).

La stessa conclusione si può stabilire o applicando il metodo di eliminazione di Kronecker (il che abbiamo qui voluto evitare, trattandosi di conseguire il fine metodologico di svincolare la nostra tratta-

[28]) L'argomentazione precedente dimostra altresì il criterio di Plücker-Clebsch sotto la forma datagli dall'Autore (Ved. la successiva nota (29) a piè di pag.). Si aggiunga che fra S_r e V_τ intercede una corrispondenza irriducibile T, in cui sono omologhi un punto Q di S_r ed un punto Q' di V_τ, quando Q è comune alle forme della r-pla rappresentata da Q'. A punti particolari Q' di V_τ posson corrispondere infiniti punti Q, ma comunque ognuno di questi, a causa dell'irriducibilità di T, può ottenersi come limite di punti omologhi del generico Q'. Quest'osservazione riescirà utile tra breve.

zione da ognuno dei processi conosciuti di eliminazione) oppure applicando un teorema di POINCARÉ, precisato da OSGOOD, sulle funzioni analitiche di più variabili [29]).

17. La conclusione precedente ha tale importanza pel nostro scopo, che val la pena di considerarla sotto un altro aspetto.

Stabiliamo anzitutto un facile lemma:

In uno spazio S_r (di cui sieno $x_0, x_1, \ldots, x_r$ le coordinate omogenee di punto) ogni ramo analitico di data origine può sempre derivarsi per continuità da un ramo prefissato della stessa origine.

Sieno:

$$\alpha) \qquad x_i = a_{i0} + a_{i1} t + a_{i2} t^2 + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

$$\beta) \qquad x_i = b_{i0} + b_{i1} t + b_{i2} t^2 + \cdots \qquad (b_{i0} = a_{i0};\ i = 0, 1, \ldots, r)$$

le rappresentazioni parametriche dei due dati rami α, β, la cui origine comune corrisponde a $t = 0$. Le serie dei secondi membri s'intendono considerate in un comune cerchio di convergenza.

Le serie:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} [\tau_0 a_{ij} + (b_{ij} - a_{ij}) \tau_1] t^j \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

sono convergenti in quel cerchio, qualunque sieno i valori (finiti) dei parametri τ_0, τ_1.

Perciò

$$\gamma) \qquad x_i = \sum_{j=0}^{+\infty} [\tau_0 a_{ij} + (b_{ij} - a_{ij}) \tau_1] t^j \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

rappresenta un ramo γ della stessa origine dei precedenti. Facendo variare il punto della retta complessa (τ_0, τ_1) da (1, 0) a (1, 1), il ramo γ passa con continuità dalla posizione iniziale α alla β. La conclusione può applicarsi ai rami tracciati du V_τ per un suo punto P (che è semplice), perché l'intorno di P è biregolarmente rappresentabile nell'intorno di un punto di un S_τ.

Ciò posto, poiché (n. prec.) l'interferenza isolata P delle $u', \ldots, u^r$ può conseguirsi quale limite di una delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r)$ varia in un conveniente ramo, denotiamo con α un tal ramo, di origine $(u', \ldots, u^r)$, e con β un qualsiasi altro ramo di V_τ, avente la stessa origine (ed esterno ad E). Facciamo poi variare il ramo γ di origine $(u', \ldots, u^r)$ da α a β; varia così con continuità il risultante $R_\tau(u)$ ed ognuno dei suoi fattori lineari, che rappresenta sempre un'interferenza delle $u', \ldots, u^r$. Onde, se P dipendesse dalla

[29]) Cfr. in proposito la mia Nota: Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche (Rend. della R. Accademia naz. dei Lincei, vol. XVII, 1° sem., 1933, pag. 1), nonché i trattati seguenti, citati nella Nota medesima: OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie (Leipzig, Teubner, 1929, II B., I Lief. p. 135); LEFSCHETZ, Topology (American Mathematical Society, 1930, pag. 383).

variazione di γ, il punto stesso varierebbe in modo continuo a partire dalla posizione P e non sarebbe una interferenza isolata.

La molteplicità d'intersezione definita per ciascuno dei limiti delle interferenze di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, quando $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ su γ, dipende a priori essa stessa da γ, ma nella variazione continua di γ non è possibile che un fattore lineare di $R_\gamma(u)$, distinto dal fattore lineare che compete a una determinata interferenza isolata, venga a coincidere con quest'ultimo, altrimenti quest'interferenza cesserebbe di essere isolata. Pertanto possiamo asserire che la molteplicità d'intersezione di un'interferenza isolata è indipendente da γ.

18. Oltre alle interferenze isolate, posson esservi altre interferenze indipendenti da γ; le chiamiamo interferenze *pseudoisolate*. La molteplicità d'intersezione in una di queste, la definiamo come il valore minimo $\geqq 1$ conseguibile per tutti i possibili γ, in quanto è naturale che per un'interferenza pseudoisolata la molteplicità d'intersezione possa variare, mutando γ.

Riassumendo l'analisi svolta dal n. 17 in poi, possiamo enunciare: *Una qualunque r-pla $u', \ldots, u^r$ di forme di ordini $n_1, \ldots, n_r$ di S_r, anche con infinite interferenze e con interferenze multiple, considerata come limite di una r-pla $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ a intersezioni semplici, variabile sopra un ramo analitico γ di origine $(u', \ldots, u^r)$, definisce per $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ un u-resultante limite $R_\gamma(u)$ delle $u', \ldots, u^r$ (ivi compreso il caso in cui l'u-resultante ordinario $R(u)$ svanisca identicamente). Il resultante limite è indipendente da γ (salvo un fattore costante non nullo) allora e soltanto allora che $u', \ldots, u^r$ abbiano un numero finito di interferenze*; *ed esso allora coincide con $R(u)$.*

In ogni caso le stelle d'iperpiani soddisfacenti ad $R_\gamma(u) = 0$ hanno per centri interferenze delle $u', \ldots, u^r$ e tra questi centri vi sono sempre, per qualunque γ, le eventuali interferenze isolate. La molteplicità d'intersezione in una P di queste, è pure indipendente da γ ed uguaglia sia l'esponente del fattore lineare corrispondente di $R_\gamma(u)$, come il numero delle intersezioni semplici di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$, che confluiscono verso P per $(\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r) \to (u', \ldots, u^r)$ su γ.

Vi posson essere anche interferenze indipendenti da γ, diverse dalle interferenze isolate (pseudoisolate).

Ogni interferenza delle $u', \ldots, u^r$, anche non isolata, può sempre ottenersi come limite di qualche interferenza di una r-pla di forme aventi un numero finito d'interferenze, la quale varii in un conveniente ramo analitico γ, non avendo mai (fuori che al limite) infinite interferenze.

19. Che cosa accade dei limiti delle intersezioni di $\bar{u}', \ldots, \bar{u}^r$ quando varia il ramo γ?

Tenuto conto del n. 17, si può far variare γ da una, α, ad altra posizione β, attraverso alla famiglia analitica ∞^1 di rami, data dalla

rappresentazione

$$x_i = (\tau_0 - \tau_1) \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} t^j + \tau_1 \sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} t^j \quad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

L'elemento di questa famiglia, dipendendo in modo analitico biunivoco, senza eccezione, dal punto (τ_0, τ_1) variabile sopra una retta proiettiva complessa, descrive un sistema ∞^1 razionale.

Epperò due gruppi limiti, deducibili l'uno dall'altro sopra una componente irriducibile dell'interferenza di $u', \ldots, u^r$, appartengono ad un sistema ∞^1 razionale di gruppi analoghi: ossia son congiunti da una serie lineare sopra una curva tracciata in quella componente; e dunque [30] la totalità di quei gruppi limiti costituisce una serie d'equivalenza.

In conclusione: *Le intersezioni limiti descrivono serie di equivalenza sulle componenti dell'interferenza delle* $u', \ldots, u^r$.

20. I risultanti limiti, essendo di ordine costante nelle u, appartengono ad un sistema lineare e vi è pertanto *un numero finito di risultanti limiti linearmente indipendenti*. Un fattore lineare comune a tutti questi risultanti limiti è indipendente dalla scelta del ramo epperò corrisponde a un'interferenza isolata o pseudoisolata. Nel caso che l'interferenza sia isolata, è invariabile, come si è visto, anche l'esponente con cui quel fattore comune comparisce nei risultanti limiti; nel caso di una interferenza pseudoisolata c'è invece un *esponente generico*, che può crescere per rami γ particolari in quanto un fattore lineare variabile può venire a sovrapporsi ad un fattore lineare fisso. Risulta così senz'altro che:

Il massimo comun divisore dei risultanti limiti [31] *consta dei fattori lineari corrispondenti alle interferenze isolate e alle interferenze pseudoisolate.*

Lo chiamiamo *risultante ridotto*. Esse *serve a determinare le interferenze isolate e le pseudoisolate delle quali dà la molteplicità d'intersezione (minima per le interferenze pseudoisolate).*

Il risultante per un sistema qualunque di equazioni.

21. Per un sistema qualunque di forme la molteplicità d'intersezione in un'interferenza isolata o in un'interferenza k-dimensionale sono definite nella mia Memoria del 1947 (citata nella nota [1]) a pié di pag.) e ad essa faccio riferimento.

---

[30]) Ved. F. Severi. Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche (Commentationes Pontificia Academia Scientiarum, 1942, p. 980).

[31]) Cioè del massimo numero di quelli che son linearmente indipendenti.

Sia

$$f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{7}$$

un dato sistema di forme nelle coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$ di un punto x di S_r, le quali non abbiano che interferenze isolate.

Se gli ordini delle f sono uguali tra loro, le f riduconsi ad almeno r linearmente indipendenti [32]), sicché r combinazioni lineari di esse, e sieno

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda_{lj} f_j = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

a parametri indeterminati (e quindi generici), sono linearmente indipendenti. La molteplicità d'intersezione delle (7) in un punto comune isolato è (per definizione) la molteplicità d'intersezione delle (8) in quel punto. E questa è data dall'esponente del fattore lineare dell'u-risultante $R(u; \lambda)$ delle (8), che corrisponde all'interferenza medesima.

Variando le λ, il risultante $R(u; \lambda)$ varia entro un sistema lineare [33]); il massimo comun divisore delle forme di questo sistema è una forma $S(u)$, la quale si scinde in tanti fattori lineari quanti sono i punti comuni alle (7) e ciascuno di tali fattori ha per esponente la molteplicità d'intersezione delle (7) nel punto medesimo. La forma deve perciò legittimamente considerarsi quale r i s u l t a n t e d e l d a t o s i s t e m a d i e q u a z i o n i.

Passiamo al caso più generale di h forme (7) di ordini disuguali, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ e sia n il massimo di questi.

Se φ denota un iperpiano generico di S_r, esso non passa per alcuna delle interferenze isolate delle (7); epperò le interferenze del sistema di forme:

$$\varphi^{n-n_j} f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, h), \tag{9}$$

abbracciano quelle delle forme (7), ciascuna conservandosi isolata pel sistema (9); e comprendono altre interferenze isolate o no, la cui posizione dipende da φ. Prese r generiche combinazioni lineari delle (9) i cui parametri chiamiamo ancora λ, la loro molteplicità d'intersezione in un punto comune alle (7) è (per definizione) la molteplicità d'intersezione in quel punto di tali combinazioni lineari.

L'u-risultante delle (9) può ben essere identicamente nullo (ciò accade quando le (9) hanno infiniti punti comuni); ma ad ogni modo possiamo considerare l'u-risultante ridotto $R(u; \lambda)$ delle predette combinazioni lineari.

Variando le λ, questo u-risultante si muove in un sistema lineare e il massimo comune divisore $S(u)$ delle forme di questo sistema è *l'u-risultante delle* (7) *originarie*. Ogni fattore lineare di tale risultante è elevato ad un esponente uguale alla molteplicità d'intersezione delle (7) nella interferenza isolata corrispondente.

[32]) Ved. la mia Memoria del 1947, pag. 227.

[33]) Descrivendo ivi un sistema unirazionale!

Lo stesso procedimento è applicabile anche quando le (7) abbiano infinite interferenze e qualche interferenza isolata, purché si faccia riferimento soltanto alle interferenze isolate e pseudoisolate delle forme date.

22. Il passaggio ad un sistema di equazioni (7) che abbiamo interferenze di dimensione > 0 non offre difficoltà.

Anzitutto conviene distinguere nell'interferenza delle (7) le varietà pure che la compongono e disporle p. es. in ordine decrescente di dimensione. Avremo così le varietà M_{h_1}, M_{h_2}, ... fino eventualmente ad una M_0 (gruppo di punti isolati) essendo $h_1 > h_2 > \cdots > 0$ [34]).

Se si vuole un risultante delle (7), che riguardi in modo particolare un punto P generico di una delle predette varietà pure, per es. la M_{h_i}, si segheranno le forme date con un S_{r-h_i} generico, rappresentato da h_i equazioni lineari a coefficienti indeterminati μ (e quindi linearmente indipendenti) e si costruirà il risultante $S(u; \mu)$ del sistema formato dalle (7) e dalle h_i equazioni lineari. I fattori lineari di $S(u; \mu)$ dànno coi loro esponenti la molteplicità d'intersezione delle (7) lungo ciascuna delle componenti irriducibili di M_{h_i} ed eventualmente lungo certe altre varietà di dimensione h_i (situate sopra componenti di dimensione $> h_i$ dell'interferenza), le quali per sezione con lo S_{r-h_i} generano interferenze pseudoisolate del sistema sezione.

---

[34]) E' noto (p. es. attraverso al metodo di eliminazione di Kronecker) che l'isolamento di queste componenti delle varie dimensioni si compie razionalmente.

(Eingegangen am 21. Januar 1950).

Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten“[1]).

Von

Helmut Grunsky in Tübingen.

Für die in Satz IV (Teil II) fehlende Einzigkeitsaussage gebe ich hier einen äußerst einfachen Beweis, der mir bisher leider entgangen war; damit ist dann auch Satz I (Teil I) in vollem Umfang bewiesen[2]).

Satz IV a. *Es gibt, von einem konstanten Faktor vom Betrage* 1 *abgesehen, nur eine einzige Lösung des in Satz IV formulierten Extremalproblems.*

Beweis[3]): $F_1(z)$ und $F_2(z)$ seien zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}_{\mathrm{IV}}$. Dann gehört, wie leicht nachzuprüfen, auch $\frac{1}{2}(F_1(z)+F_2(z)) = F_3(z)$ zu $\mathfrak{K}_{\mathrm{IV}}$. Sind F_1 und F_2 zwei Extremalfunktionen, so darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden. $F_1^{(j)}(z^*)$ und $F_2^{(j)}(z^*)$ seien positiv, also $F_1^{(j)}(z^*) = F_2^{(j)}(z^*) = \max_{F\in\mathfrak{K}_{IV}} |F^{(j)}(z^*)|$. Dann ist auch F_3 eine Extremalfunktion, muß also nach dem sonstigen Inhalt von Satz IV auf jedem $\mathfrak{C}_\lambda$ überall den Betrag m_λ (im Sinne stetiger Randwerte) haben. In der Abschätzung für $z \in \mathfrak{C}_\lambda$: $|F_3(z)| \leqq \frac{1}{2}|F_1(z)| + \frac{1}{2}|(F_2(z)| = m_\lambda$ gilt jedoch dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn $\arg F_1(z) = \arg F_2(z)$. Also muß auf jedem $\mathfrak{C}_\lambda$ gelten: $F_1(z) = F_2(z)$. Nun sind aber F_1 und F_2, wenn wir die C_ν ohne Beschränkung der Allgemeinheit (vgl. Teil I, S. 237) als analytische Kurven voraussetzen, auf den $\mathfrak{C}_\lambda$ regulär, weshalb die vorige Gleichung ohne weiteres ihre Identität nach sich zieht.

Der mühsame Weg von Teil III zu einem speziellen Einzigkeitssatz erweist sich sonach als entbehrlich. Doch hoffe ich, daß die dort entwickelten Gedankengänge brauchbare Ansätze zu weiteren Untersuchungen der Topologie der in Rede stehenden Funktionsklassen enthalten.

---

[1]) Teil I und II: Jahresber. Deutsche Math.-Vereinig. **50**, 230—255 (1940); **52**, 118—132 (1942). Teil III: Ein Einzigkeitssatz: Math. Z. **51**, 586—615 (1949).

[2]) Bei Ahlfors, Bounded analytic functions. Duke math. J. **14**, 1—11 (1947), ergibt sich der entsprechende Einzigkeitssatz mühelos als Nebenresultat einer etwas weiter führenden Theorie.

[3]) Vgl. einen entsprechenden Beweis bei M. Heins, On a problem of Walsh concerning the Hadamard three circles theorem. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 349—372 (1944), insbes. S.354.

(Eingegangen am 24. Februar 1950.)

Physik

Ein Lehrbuch

Von

Dr. **Wilhelm H. Westphal**
b. a. o. Professor der Physik an der Technischen Universität Berlin

Vierzehnte und fünfzehnte Auflage
Mit 650 Abbildungen. XII, 758 Seiten. 1950. Ganzleinen DMark 29.70

Inhaltsübersicht:

Einleitung. — **Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper.** Bewegungslehre. Die Lehre von den Kräften. Die allgemeine Gravitation. — **Physik der Stoffe.** Die Materie. Die Elastizität der festen und flüssigen Stoffe. Mechanik ruhender Flüssigkeiten. Mechanik ruhender Gase. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase. Schwingungen und Wellen. Schall. — **Wärmelehre.** Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit. — **Elektrostatik.** Die elektrostatischen Erscheinungen im Vakuum. Die elektrischen Eigenschaften der Stoffe. — **Elektrische Ströme.** Elektrische Ströme in festen Leitern. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern. Elektrische Ströme in Gasen. — **Magnetismus und Elektrodynamik.** Magnetische Felder im Vakuum. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Elektromagnetische Induktion. Elektromagnetische Geräte. Wechselstrom. Elektrische Maschinen. Elektrische Schwingungen und Wellen. — **Optik und allgemeine Strahlungslehre.** Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung. Geometrische Optik. Wellenoptik. Das elektromagnetische Spektrum. Temperaturstrahlung. **Relativitätstheorie. — Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle.** Quantentheorie des Lichtes. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik. Physik der Atomkerne. Ultrastrahlung. **Astrophysik uud Physik des Weltalls.** — Schlußwort. Anhang. Namen- und Sachverzeichnis.

Zum erstenmal seit dem Kriege ergab sich durch den vollständigen Neusatz dieser neuen Auflage die Möglichkeit zu einer großen Zahl lange geplanter Verbesserungen und Ergänzungen. Überdies ist vor einiger Zeit vom gleichen Verfasser sein neues, für Leser mit weniger weitgehenden Ansprüchen bestimmtes „Kleines Lehrbuch der Physik“ erschienen. Deshalb hat er geglaubt, die Darstellung in dem vorliegenden Buche hier und da ein wenig vertiefen zu dürfen.

Das Kapitel „Relativitätstheorie“ ist völlig neu geschrieben und wesentlich erweitert worden. Zum größten Teil wurde ferner das Kapitel über „Physik der Atomkerne“ neu geschrieben, völlig neu auch das Kapitel „Astrophysik und Physik des Weltalls“. Weitere Neufassungen und Erweiterungen finden sich in allen Teilen des Buches. Im Einvernehmen mit Prof. R. W. Pohl und Prof. A. Eucken wurde in § 50 der Begriff der Stoffmenge und der Mol- und Grammatommasse neu eingeführt, um die bisher mit dem Begriff Molekulargewicht verknüpften Schwierigkeiten zu beseitigen. Vielfach geäußerten Wünschen entsprechend, sind in zahlreichen Fußnoten biographische Angaben über die bedeutendsten Forscher gemacht worden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundzüge der theoretischen Logik

Von

D. Hilbert † und Dr. **W. Ackermann,** Lüdenscheid

Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949.
DMark 16.50; Ganzleinen DMark 19.80

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften
in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F. K. Schmidt · B. L. van der Waerden

Band XXVII.

Aus dem Vorwort:

Die Veränderungen gegenüber der zweiten Auflage sind verhältnismäßig gering. Abgesehen von kleineren Verbesserungen und Zusätzen haben § 1 und § 2 des zweiten Kapitels, bei denen die bisherige Darstellung reichlich kurz war, eine Erweiterung erfahren. Im dritten Kapitel sind die Fassungen der Einsetzungsregel für die Prädikatenvariablen und des Gödelschen Vollständigkeitssatzes verbessert, beim Entscheidungsproblem neue Fortschritte nachgetragen worden. Am stärksten verändert hat sich der in § 5 des vierten Kapitels gegebene Aufbau des Stufenkalküls. Ein kurzer Schlußabschnitt ist hinzugekommen.

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung. — Erstes Kapitel. **Der Aussagenkalkül.**
Einführung der logischen Grundverknüpfungen. Äquivalenzen; Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen. Normalform für die logischen Ausdrücke. Charakterisierung der immer richtigen Aussagenverbindungen. Das Prinzip der Dualität. Die disjunktive Normalform für logische Ausdrücke. Mannigfaltigkeit der Aussagenverbindungen, die aus gegebenen Grundaussagen gebildet werden können. Ergänzende Bemerkungen zum Problem der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit. Systematische Übersicht über alle Folgerungen aus gegebenen Axiomen. Die Axiome des Aussagenkalküls. Beispiele für die Ableitung von Formeln aus den Axiomen. Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems. Die Unabhängigkeit und Vollständigheit des Systems.
Zweites Kapitel. **Der Klassenkalkül** (einstellige Prädikatenkalkül).
Inhaltliche Umdeutung der Symbolik des Aussagenkalküls. Vereinigung des Klassenkalküls mit dem Aussagenkalkül. Systematische Ableitung der traditionellen Aristotelischen Schlüsse.
Drittes Kapitel. **Der engere Prädikatenkalkül.**
Unzulänglichkeit des bisherigen Kalküls. Methodische Grundgedanken des Prädikatenkalküls. Vorläufige Orientierung über den Gebrauch des Prädikatenkalküls. Genaue Festlegung der Bezeichnungen im Prädikatenkalkül. Die Axiome des Prädikatenkalküls. Das System der identischen Formeln. Die Ersetzungsregel; Bildung des Gegenteils einer Formel. Das erweiterte Dualitätsprinzip; Normalformen. Die Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit des Axiomensystems. Die Vollständigkeit des Axiomensystems. Ableitung der Schlußfolgerungen aus gegebenen Voraussetzungen; Zusammenhang mit den identischen Formeln. Das Entscheidungsproblem.
Viertes Kapitel. **Der erweiterte Prädikatenkalkül.**
Der Prädikatenkalkül der zweiten Stufe. Einführung von Prädikatenprädikaten; logische Behandlung des Anzahlbegriffs. Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre im erweiterten Kalkül. Die logischen Paradoxien. Der Stufenkalkül. Anwendungen des Stufenkalküls. Abschließende Bemerkungen zum Stufenkalkül. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.